Sistemas de numeración

En esta secuencia identificarás las propiedades del sistema de numeración decimal y las contrastarás con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales.

SESIÓN 1

ACERTIJOS ARQUEOLÓGICOS

Es la introducción al tema de la sesión.

>>> Para empezar

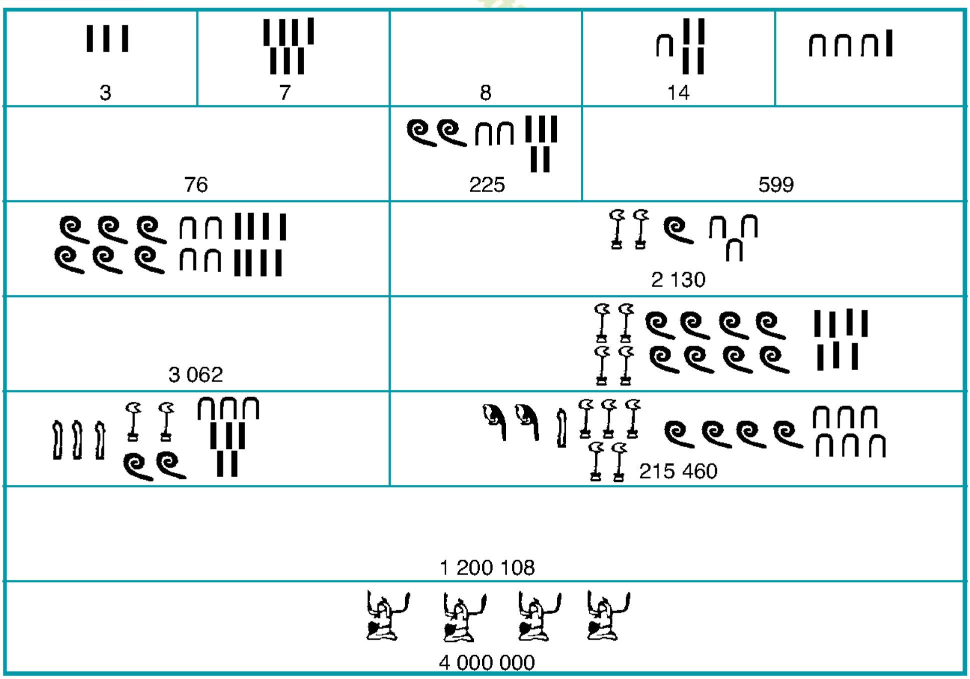
La necesidad de contar y de registrar cantidades ha estado presente en muchas civilizaciones; sin embargo, no todas lo han hecho de la misma manera. En quinto grado de primaria realizaste la comparación del sistema de numeración decimal con el sistema egipcio y con el sistema romano. En esta sesión se va a retomar el sistema egipcio. ¿Sabías que se comenzó a utilizar aproximadamente en el año 3000 antes de nuestra era?

Aquí se propone un problema.

Van a trabajar en parejas.

>>> Consideremos lo siguiente

Fíjense cómo escribían los antiguos egipcios algunos números y completen la tabla.



Escriban en sus cuadernos el sucesor de este número, según el sistema egipcio.

𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

Todo el grupo.

Recuerden que:

Para encontrar el sucesor de un número entero debe sumársele uno; para encontrar el antecesor debe restársele uno. Por ejemplo, el sucesor de 7 es 8 y su antecesor es 6.

>>> Manos a la obra

Son las actividades de la sesión que te ayudarán a recordar lo que ya sabes, a analizar lo que estés aprendiendo y a deducir nuevas estrategias de solución.

I. Completen la siguiente tabla, escriban los símbolos egipcios y el valor de algunos de ellos, según corresponda.

Símbolo egipcio	𓏤	𓎆		𓆼			𓁨
Valor del símbolo			100		10 000	100 000	

II. Completen la tabla con números del sistema egipcio.

Antecesor	Número en el sistema egipcio	Sucesor
𓏤𓏤𓏤𓏤	𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤	
	𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤	𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆
	𓆼𓆼 𓎆𓎆𓎆	
𓆐 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤	𓆐 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤𓏤	
	𓂭 𓆼𓆼𓆼	
	𓁨 𓆐𓆐 𓂭	

Comparen sus tablas y comenten cuántos símbolos se necesitan para escribir el antecesor de 𓆐, según el sistema egipcio.

III. En ocasiones los egipcios escribían los números en sentido opuesto. Así, podían escribir  o también  y el valor del número es el mismo.

a) ¿Cuál es el valor del número anterior? ____________________

b) Usando el sistema egipcio, escriban en sus cuadernos el número 100 436, en ambos sentidos.

Aquí se presentan las conclusiones sobre los conceptos revisados.

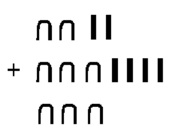
>>> A lo que llegamos

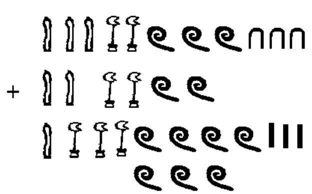
- El sistema de numeración egipcio es un **sistema aditivo no posicional**. Es aditivo porque para encontrar el valor de un número se debe sumar el valor de cada uno de los símbolos que aparecen en el número; y es no posicional porque puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.
- Cada símbolo se puede repetir hasta nueve veces. Cuando se llega a 10 símbolos iguales se sustituyen por otro que representa el valor de esos 10 símbolos.
- Con los siete símbolos que tenían los egipcios sólo podían representar números menores que 10 000 000; para ellos esto no era problema porque no se les presentaban situaciones en las que tuvieran que utilizar números más grandes.
- Se piensa que el jeroglífico que representa 1 000 000 () es la figura de un sacerdote o de un astrónomo que está viendo hacia el cielo, tratando de contar la gran cantidad de estrellas que hay.
- Una desventaja del sistema egipcio es que para escribir ciertos números se necesitan muchos símbolos.

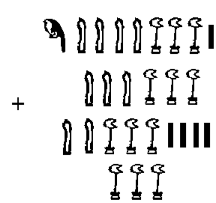
Ejercicios para aplicar y entender mejor lo que acabas de aprender.

>>> Lo que aprendimos

Los antiguos egipcios realizaban sumas como las siguientes. Expresa los resultados de cada una de ellas utilizando los números del sistema egipcio.







>>> Para empezar

Los números mayas

Vean el video sobre el sistema de numeración maya.

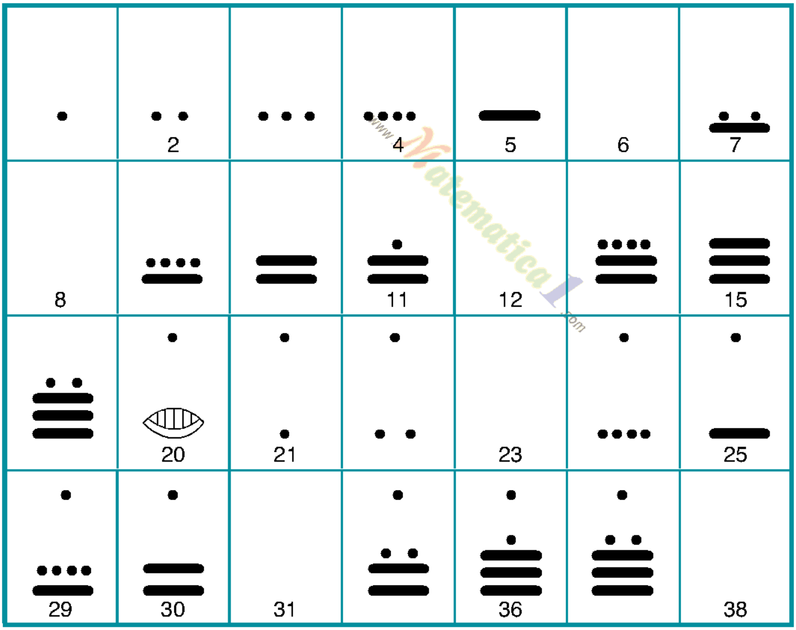
La civilización maya fue una de las culturas más importantes de la época prehispánica de América Central. Los mayas fueron grandes astrónomos, mucho más exactos que sus contemporáneos europeos.

El periodo Clásico de la civilización maya se desarrolló entre el año 300 y el año 1000 de nuestra era.

En esta sesión estudiarás las características del sistema de numeración de los mayas.

>>> Consideremos lo siguiente

Fíjense cómo escribían los mayas algunos números y completen la tabla.



Escriban en sus cuadernos los números del 1 al 20 en el sistema de numeración maya.

¿Cuánto vale el símbolo • ? ______________________________

¿Cuánto vale el símbolo ▬ ? ______________________________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron. Comenten cómo escribieron el 20 en el sistema maya y cuál es el símbolo que corresponde al cero.

>>> Manos a la obra

I. Los números 6 y 25 escritos en sistema maya se parecen mucho:

6   25

Para distinguirlos, en el caso del 25, los mayas dejaban un espacio entre el punto y la raya. El espacio indica que se tienen dos niveles: en el primer nivel, de abajo hacia arriba, van las unidades; en el segundo van los grupos de 20.

En el segundo nivel este punto vale 20	•	1 × 20
En el primer nivel hay 5 unidades	▬	5 × 1
	25	25 = 20 + 5

Escriban en sus cuadernos el 11, el 16, el 30 y el 35 en maya.

Comparen sus escrituras de los números y comenten cómo los distinguen.

II. Fíjense cómo escribían los mayas el 40:

En el segundo nivel cada punto vale 20: ya tenemos los 40	• •
En el primer nivel hay 0 unidades	

Para indicar que no hay que agregar nada más, los mayas utilizaban un símbolo especial para el cero: , indicando que un nivel está vacío. Este símbolo representa una concha o un caracol.

2 de 20	• •	2 × 20
0 unidades		0 × 1
	40	40 = 40 + 0

Observen cómo escribían los mayas algunos números y completen la tabla.

41	42	60	61		70	
77	78			81	100	120

Comparen sus tablas y comenten cómo escribieron los números.

III. Los mayas escribían el 400 de la siguiente manera:

En el tercer nivel este punto vale 400	•	1 × 400
En el segundo nivel ponían 0 de 20		0 × 20
En el primer nivel ponían 0 unidades		0 × 1
	400	400 = 400 + 0 + 0

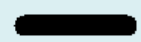
Escriban el número 401 en el sistema maya y completen la tabla.

En el tercer nivel 1 de 400		1 × 400
En el segundo nivel ____ de 20		____ × 20
En el primer nivel ____ unidades		____ × 1
	401	401 = ____ + ____ + ____

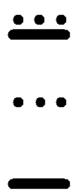
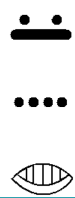
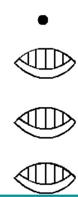
También van a realizar las actividades del interactivo.

IV. En el antiguo sistema de numeración maya se agrupaba de 20 en 20. Por esta razón en cada nivel puede ponerse cualquier número del 1 al 19 y luego, al llegar al 20, hay que poner un punto en el siguiente nivel. Así, en el primer nivel de abajo hacia arriba se escriben las unidades, en el segundo se tienen los grupos de 20, en el tercero se tienen los grupos de 20 × 20 = 400, en el cuarto se tienen los grupos de 20 × 20 × 20 = 8 000, etcétera.

Por ejemplo, el número 2 077 se escribía en maya de la siguiente manera:

5 de 400		5 × 400
3 de 20		3 × 20
17 unidades		17 × 1
	2 077	2 077 = 2 000 + 60 + 17

Completen la siguiente tabla. Escriban las operaciones que se requieren en cada caso.

				
8 × 400 + 3 × 20 + 5 × 1 = 3 200 + 60 + 5 = 3 265			= 4 077	

Comparen los números y comenten cómo los encontraron.[1]

1 En el tercer nivel se tenían los grupos de 360, y no de 400. Se piensa que esto era así debido a que los mayas manejaban un calendario de 360 días. A partir de aquí, el valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior. Así, en el cuarto nivel, se tienen los grupos de 7 200 (360 × 20), y no de 8 000; en el quinto nivel se tienen los grupos de 144 000 (7 200 × 20), y no de 160 000, etcétera.

>>> A lo que llegamos

- El sistema de numeración maya es un **sistema posicional** porque el valor de cada número depende de la posición (o nivel) en la que se encuentre. El valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior.
- En el sistema maya existen tres símbolos: •, ▬ y . Con estos símbolos los mayas podían escribir cualquier número. Utilizaban el símbolo  para indicar que una posición está vacía.
- Los mayas llegaron a utilizar números muy grandes: existen calendarios en los que se menciona un periodo de tiempo de 300 millones de años.

>>> Lo que aprendimos

1. En la columna de la derecha ordena los siguientes números del menor al mayor.

• • • • ▬	
• • • •	
• • • •	
• • • ▬ •	
▬	
• • •  •	

¿En qué te fijaste para ordenar los números? ____

____

SESIÓN 3

EL SISTEMA DECIMAL

>>> Para empezar

El sistema de numeración decimal tiene sus orígenes en los números hindúes y fueron dados a conocer en Europa por los árabes, por lo que se les conoce como números indoarábigos.

>>> Consideremos lo siguiente

En esta actividad debes hacer una suma paso a paso para que vayas obteniendo los números que están en la columna de la izquierda. Por ejemplo: para pasar del 0 al 900, se suma 900, y para pasar del 900 al 902, se suma 2. Debes poner, además, cómo se lee cada número.

RESULTADO	OPERACIÓN REALIZADA	EL RESULTADO SE LEE
0	**	Cero
900	Se suma 900	
902	Se suma 2	Novecientos dos
400 902		
410 902		
410 972		Cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos
50 410 972		
58 410 972	Se suma 8 000 000	Cincuenta y ocho millones cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos
58 416 972		
858 416 972		

a) Completa la siguiente suma con los números que obtuviste en la columna de "operación realizada":

900 + 2 + ________ + ________ + ________ + ________ + 8 000 000 + ________ + ________

b) ¿Cuál es el resultado de hacer esta suma? ____________________

c) En el sistema de numeración decimal hay 10 símbolos o cifras. ¿Cuáles son?

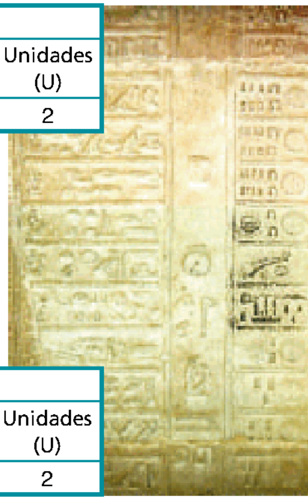
____

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Observa la siguiente tabla:

Millones		Millares			Unidades		
D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
5	8	4	1	0	9	7	2



El número 58 410 972 se lee "cincuenta y ocho millones cuatrocientos diez mil novecientos setenta y dos".

Fíjate en la tabla y responde.

Millones			Millares			Unidades		
C. de millón	D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
8	5	8	4	1	6	9	7	2

¿Cómo se lee el número 858 416 972?

____

____

Comenten y comparen sus respuestas.

Cuando se leen los números se agrupan cada tres cifras. Las tres primeras, de derecha a izquierda, son las unidades; las tres siguientes son los miles; las tres siguientes son los millones; luego vienen los miles de millones y después los billones.

II. En el número 858 416 972, el valor posicional del 5 es 50 000 000 unidades; el valor posicional del 6 es 6 000 unidades. Completa la tabla con el valor posicional de cada cifra.

Millones			Millares			Unidades		
C. de millón	D. de millón	U. de millón	C. de millar	D. de millar	U. de millar	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
8	5	8	4	1	6	9	7	2
	50 000 000		400 000		6 000		70	2

El valor posicional es

a) Completa la suma de todos los números del tercer renglón, leídos de derecha a izquierda:

2 + 70 + ____________ + 6 000 + ____________ + 400 000 + ____________ + 50 000 000 + ____________

b) ¿Cuál es el resultado de esta suma? ____________

c) Estos números también se expresan utilizando multiplicaciones: las unidades se multiplican por 1 y los demás números se multiplican por 10, 100, 1000. Completa la tabla para expresar así cada una de las cantidades.

8	5	8	4	1	6	9	7	2
	50 000 000		400 000		6 000		70	2
		8 × 1 000 000			6 × 1 000	9 × 100	7 × 10	2 × 1

El valor posicional es

d) Completa la suma de todos los números del último renglón:

2 × 1 + 7 × 10 + ____________ + 6 × 1 000 + ____________ +

____________ + 8 × 1 000 000 + 5 × 10 000 000 + ____________

Comparen sus tablas y comenten:

a) En el número 858 416 972, ¿cuál es el valor posicional del primer 8, de izquierda a derecha? ____________

b) ¿Cuál es el valor posicional del siguiente 8? ____________

III. Completa la tabla con el valor posicional de cada cifra en el número 50 410 972.

Millones		Millares			Unidades		
5	0	4	1	0	9	7	2
50 000 000		400 000					

El valor posicional es

a) ¿Cuál es el valor posicional del primer 0, de izquierda a derecha? ____________

b) ¿Cuál es el valor posicional del siguiente 0? ____________

c) Expresa en tu cuaderno el número 50 410 972, utilizando los múltiplos de 10.

Comparen sus respuestas.

En el sistema de numeración decimal se agrupa de 10 en 10: 10 unidades forman una decena, 10 decenas forman una centena, 10 centenas forman una unidad de millar, etcétera. En cada posición puede ponerse una cifra del 0 al 9; al llegar al 10 hay que agregar una unidad en la siguiente posición. Así, de derecha a izquierda, en la primera posición van las unidades, en la segunda posición van los grupos de 10, en la tercera posición van los grupos de 10 × 10 = 100, en la tercera posición se tienen los grupos de 10 × 10 × 10 = 1 000, etcétera.

IV. El siguiente es un juego por equipos. Cada integrante del equipo debe hacer cinco tarjetas como las que se muestran y recortarlas.

Millones	Mil	Seis	Tres	Ocho

Encuentren todos los números que pueden obtenerse usando las cinco tarjetas. Anótenlos en sus cuadernos en orden de menor a mayor, con letra y con número.

a) ¿Cuántos números diferentes encontraron? ____________

b) ¿Cuál es el mayor? Escríbanlo con números ____________

c) ¿Cuál es el menor? Escríbanlo con números ____________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

- En el sistema de numeración decimal, que es el de uso oficial en nuestro país y en casi todo el mundo, se usan diez símbolos o cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 llamados **dígitos**.
- Es un **sistema posicional** porque el valor de cada dígito depende de la posición en la que se encuentre. Al escribir números enteros, el valor del dígito que está en la segunda posición, de derecha a izquierda, se multiplica por 10; el que está en la tercera se multiplica por 100; el que está en la cuarta se multiplica por 1 000, y así sucesivamente.
- Uno de los dígitos, el 0, sirve para indicar que una determinada **posición** está **vacía**.

>>> Lo que aprendimos

1. De acuerdo con los datos del último *Censo General de Población y Vivienda*, en el año 2000 México tenía 97 483 412 habitantes. El estado más poblado era el Estado de México con 13 083 359, el menos poblado era Baja California Sur con 423 516. El DF tenía 8 591 309, Jalisco 6 321 278 y Veracruz 6 901 111.

Con estos datos haz una tabla en la que indiques:

- El nombre de cada estado.
- Su población, escrita con número y con letra.

Ordena los datos de menor a mayor población.

2. Relaciona las columnas:

	( ) Puede escribirse un número poniendo los símbolos en sentido opuesto sin que cambie el valor del número.
A. Sistema de numeración decimal.	( ) El valor de cada posición se obtiene multiplicando por 10 el valor de la posición anterior.
	( ) Tiene tres símbolos.
B. Sistema de numeración maya.	( ) El valor de cada nivel se obtiene multiplicando por 20 el valor del nivel anterior.
C. Sistema de numeración egipcio.	( ) Para escribir ciertos números se necesitan muchos símbolos.
	( ) Se usan diez símbolos o cifras
	( ) No tiene cero.

3. Agrega a las tarjetas de la actividad IV, una tarjeta con el nombre ciento(s). Esta tarjeta puede utilizarse como el singular *ciento* o el plural *cientos*. Encuentra la mayor cantidad posible de números que pueden obtenerse usando las seis tarjetas. Escríbelos en tu cuaderno con letra y con número. Indica el número mayor y el número menor.

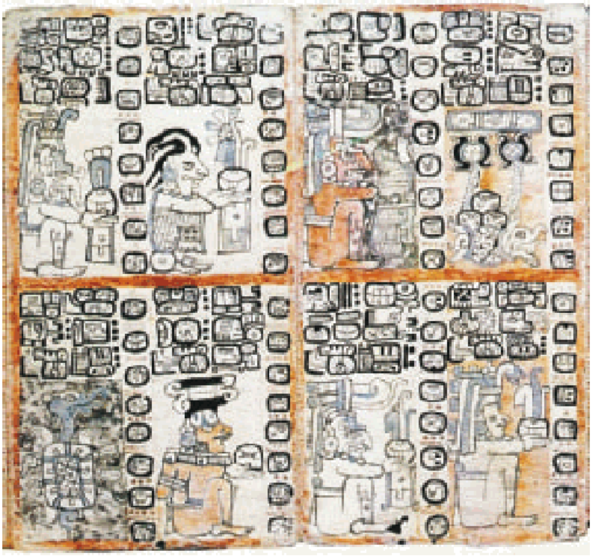
4. ¿Tienen en tu comunidad un sistema de numeración distinto del decimal?, ¿cuántos símbolos tiene?, ¿es aditivo?, ¿es posicional?, ¿hay algún símbolo que indique que una posición está vacía?

>>> Para saber más

Sugerencias para que revises otros materiales con los que puedes ampliar tu conocimiento del tema.

Sobre los sistemas de numeración consulta en el libro de texto de *Matemáticas quinto grado*, SEP, la portada del Bloque 1 (pp. 8 y 9).

Sobre los sistemas de numeración maya consulta:
http://interactiva.matem.unam.mx/matechavos/sabias/html/mayas/html/mayas.html
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.



Fracciones y decimales en la recta numérica

En esta secuencia trabajarás en la representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

SESIÓN 1

EL SALTO DE ALTURA

>>> Para empezar

El salto de altura

El salto de altura es una de las competencias atléticas más atractivas. Se trata de saltar sobre una barra horizontal que está colocada a varios metros sobre el nivel del piso. ¡Los mejores atletas saltan más de 2 metros de altura!

Para decidir cuándo un competidor gana o pierde una competencia es muy importante medir de modo muy preciso la altura de sus saltos. Las mediciones de los saltos se pueden realizar usando fracciones y números decimales.

La tabla muestra tres marcas conseguidas en el salto de altura por distintos atletas.

Año	Competencia	Atleta	Longitud aproximada del salto (metros)
1993	Campeonato Mundial de Atletismo	Javier Sotomayor	$2\frac{1}{2}$
1996	Juegos Olímpicos de Estados Unidos	Charles Austin	$2\frac{2}{5}$
2004	Juegos Olímpicos de Atenas	Stefen Hölm	$2\frac{1}{3}$

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente recta se ha representado el salto de Sotomayor. Anota en el lugar correspondiente la representación de la distancia que saltaron Austin y Hölm.

Recuerda que:
Un número mixto se puede expresar como una fracción impropia. Por ejemplo, $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

a) ¿Quién hizo el salto de mayor altura? ____________________

b) ¿Quién hizo el salto de menor altura? ____________________

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Ubica en la siguiente recta los números 1, $\frac{1}{2}$ y $1\frac{1}{2}$.

a) En la misma recta ubica el 3.

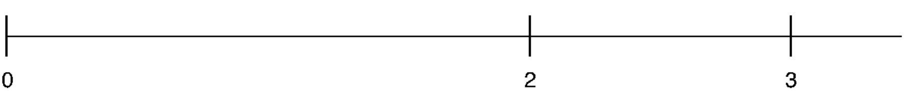
b) ¿Cómo supiste dónde va el 3? ____________________

c) Con tu regla mide la distancia del 0 al 1. ¿Cuánto es? ____________________

¿Y la distancia de 1 a 2? ____________________, ¿y la de 2 a 3? ____________________

Verifica que estas tres distancias sean iguales, si no es así revisa en dónde está el error.

II. Considera ahora sólo la distancia de 2 a 3.



a) Ubica el punto $2\frac{1}{3}$ (altura que saltó Hölm).

b) ¿Qué hiciste para localizar el punto $2\frac{1}{3}$?

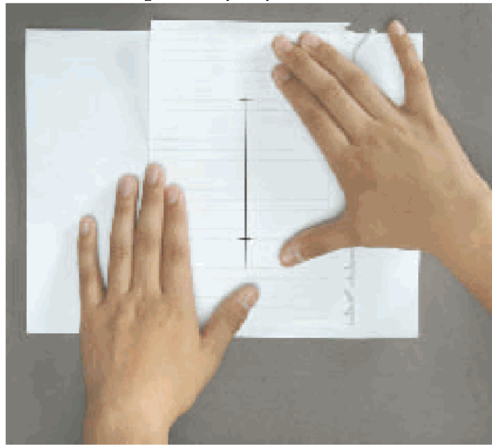
____

____

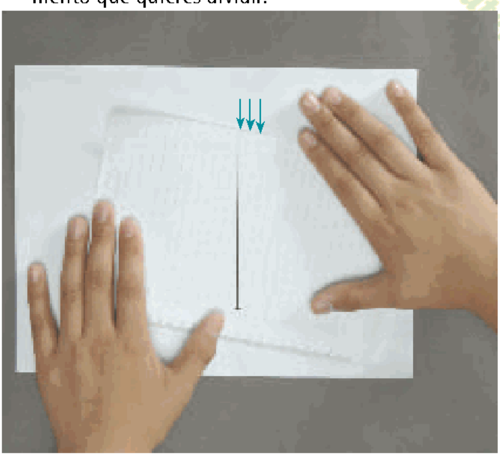
c) Hay muchas maneras de dividir un segmento en tres partes iguales; a continuación se presenta una.

1. Necesitas una hoja rayada.

2. Tomas la hoja de papel y colocas una de las rayas al inicio del segmento que quieres dividir.

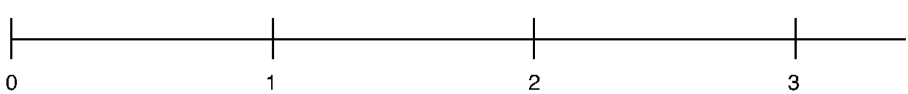


3. Giras la hoja hasta que tres renglones corten al segmento que quieres dividir.



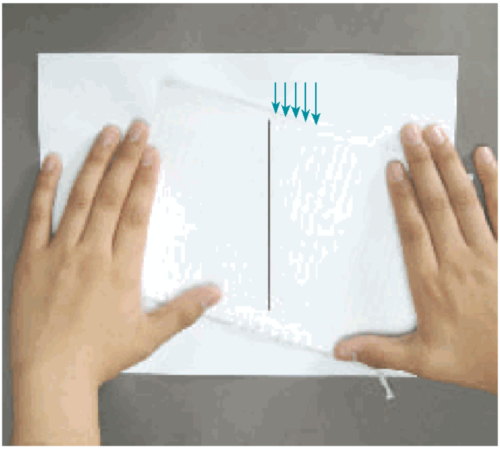
4. Pones una marca en cada corte y ¡listo! el segmento queda dividido en tres partes.

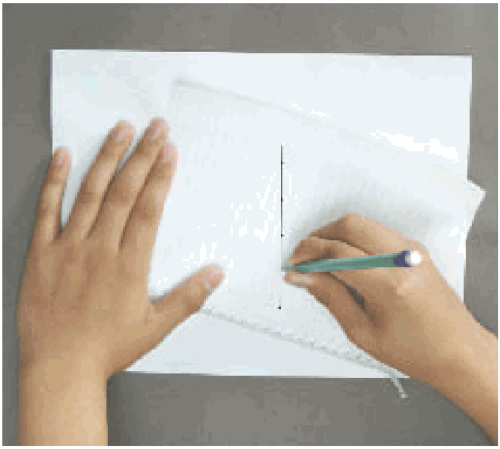
d) Utiliza el procedimiento anterior para dividir segmentos en tres partes iguales y ubica en la recta $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$.



e) Verifica que el segmento que va de 0 a 1 haya quedado dividido en tres partes iguales. Puedes usar tu regla para medir la longitud de las partes.

El número de renglones que debes considerar es igual al número de partes en que quieres dividir el segmento; por ejemplo, si quieres dividirlo en cinco partes, giras la hoja hasta que cinco renglones corten al segmento.





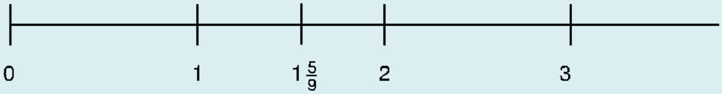
III. Considera la recta y ubica los puntos que corresponden a $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 1\frac{3}{5}, 1\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5}$.

Utiliza tu regla para verificar que el segmento que va de 1 a 2 haya quedado dividido en cinco partes iguales.

Regresen al problema inicial y verifiquen, apoyándose en el procedimiento de la hoja rayada, si localizaron bien los saltos de Austin y Hölm.

>>> A lo que llegamos

En la recta numérica pueden ubicarse fracciones.



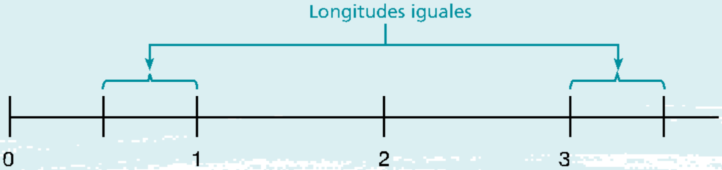
Si se desea ubicar novenos en la recta, la unidad en la que se va a ubicar debe quedar dividida en nueve partes iguales.

Para ubicar números en la recta numérica es importante que consideres que a diferencias iguales entre números deben corresponder distancias iguales.

Por ejemplo,

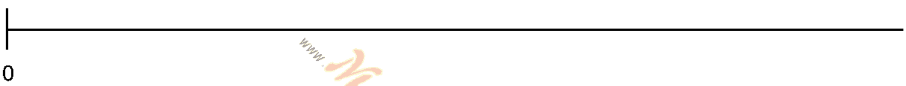
a) la distancia de 3 a 4 debe ser la misma que la de 4 a 5.

b) la distancia de $\frac{1}{2}$ a 1 debe ser la misma que la de 3 a $3\frac{1}{2}$.



IV. Cada uno de los miembros de la pareja localice la fracción $\frac{5}{3}$ en la siguiente recta numérica considerando los puntos dados. Háganlo por separado.

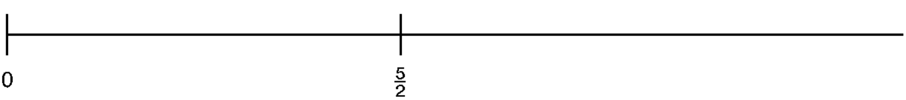
Recta A



Comparen sus respuestas. Con su regla midan la distancia de 0 a $\frac{5}{3}$. ¿Es la misma o es distinta? ¿Porqué creen que sea así?

IV. En la **recta B** localicen 1 y 2. Háganlo por separado y no se olviden de considerar los puntos dados.

Recta B



a) ¿En cuántas partes dividieron el segmento que va de 0 a $\frac{5}{2}$? ________________

b) Localicen otra vez la fracción $\frac{5}{3}$, pero ahora háganlo en la **recta B**.

c) ¿Llegaron los dos al mismo resultado? Comenten cómo lo obtuvieron.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántas maneras distintas encontraron para localizar $\frac{5}{3}$ en la **recta A**?

b) ¿Cuántas maneras distintas hay para localizar $\frac{5}{3}$ en la **recta B**?

>>> A lo que llegamos

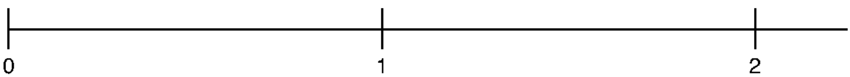
En una recta numérica que sólo tiene localizado un número, hay muchas maneras correctas de localizar otro. Por ejemplo, en la recta A de la actividad anterior hay muchas maneras distintas de localizar $\frac{5}{3}$.

Si en la recta numérica están ya localizados dos puntos, entonces hay una sola manera de localizar cualquier otro. Por ejemplo, en la recta B de la actividad anterior hay una sola manera de localizar $\frac{5}{3}$.

>>> Lo que aprendimos

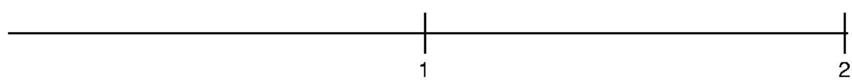
1. Usa una hoja rayada para dividir segmentos en el número de partes que se requiere y ubica las fracciones que se indican.

a) $\frac{2}{5}$

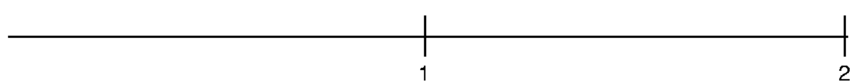


b) $1\frac{2}{5}$

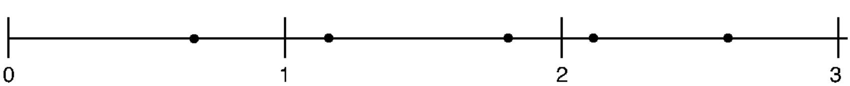
c) $\frac{3}{7}$



d) $\frac{11}{10}$

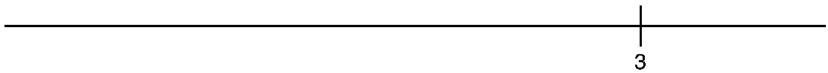


2. Anota el número que corresponde a cada punto.

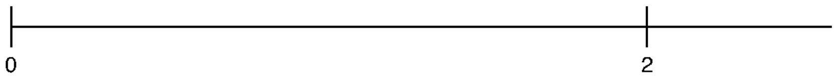


3. Ubica en la recta numérica los números indicados.

a) $\frac{1}{2}$

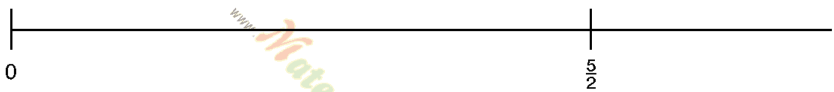


b) $\frac{3}{4}$



c) $1\frac{1}{2}$

d) $2\frac{2}{3}$



Comenten sus respuestas con otros compañeros. Mencionen la manera en que hallaron los números de la actividad 2. Con respecto a la actividad 3, comenten acerca de cuáles incisos tenían varias respuestas y cuáles sólo una y justifiquen por qué tenían una o varias respuestas.

SESIÓN 2

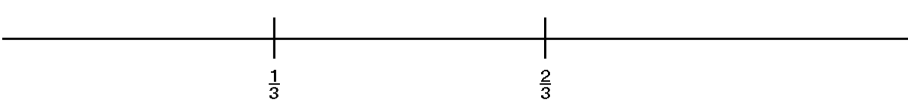
DENSIDAD Y FRACCIONES

>>> Para empezar

Entre dos fracciones siempre hay otra fracción. A esta propiedad se le conoce como densidad de las fracciones. En esta sesión estudiarán esta propiedad.

>>> Consideremos lo siguiente

Encuentren un número que esté entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Localícenlo en la siguiente recta numérica:



Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Los alumnos de otra telesecundaria dijeron que no hay ningún número entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, porque entre 1 y 2 no hay ningún número.

Comenten: ¿Están de acuerdo con ellos?, ¿por qué?

II. En la recta numérica localicen los números 0 y 1.

El segmento que va de 0 a 1 queda dividido en tercios. Verifíquenlo.

a) Dividan los tercios en sextos, ¿en cuántas partes tienen que dividir cada tercio?

____

b) Entre $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{6}$ hay otra fracción con denominador 6, ¿cuál es? ________________

Localícenla en la recta.

c) Dividan en novenos el segmento de 0 a 1, ¿en cuántas partes tienen que dividir cada tercio? ____

d) Encuentren y localicen en la recta tres números que estén entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. ¿Cuáles son?

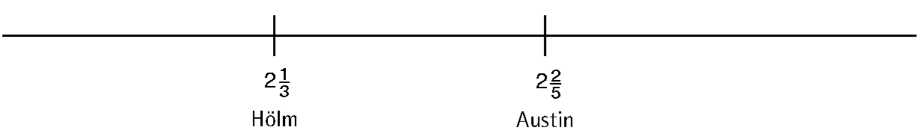
____________________ ____________________ ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Entre cualquier par de números fraccionarios siempre hay otros números fraccionarios. Ésta es una propiedad que se conoce como propiedad de densidad de las fracciones.

III. En las rondas eliminatorias para el Campeonato Mundial de 2005, un competidor tuvo mejores marcas que Hölm, pero no superó la marca de Austin. En la recta numérica están representadas las alturas que saltaron Hölm y Austin.



Contesten:

¿Cuánto pudo haber saltado el nuevo competidor? ____________________

Representen esta altura en la recta numérica.

IV. Los alumnos de otra telesecundaria dijeron que no se puede resolver el problema anterior. Convirtieron los resultados de Austin y de Hölm a quinceavos:

Recuerda que:

Cuando en una fracción se multiplica por el mismo número al numerador y al denominador, se obtiene una fracción equivalente.
Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{Numerador } 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \\ \text{Denominador } 5 \xrightarrow{\times 3} 15 \end{array} \qquad \frac{2}{5} \to \frac{6}{15}.$$

Entonces $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ son equivalentes.

Charles Austin: $2\frac{2}{5}$ m = $2\frac{6}{15}$ m.

Stefen Hölm: $2\frac{1}{3}$ m = $2\frac{5}{15}$ m.

Y dijeron que entre $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$ no hay ningún número.

¿Están de acuerdo con lo que dicen en esa escuela? ¿Por qué?

V. En la recta numérica localicen $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$. Dividan en treintavos y encuentren:

$$2\frac{6}{15} = 2\frac{\square}{30}$$

$$2\frac{5}{15} = 2\frac{\square}{30}$$

a) ¿En cuántas partes hay que dividir cada quinceavo para obtener treintavos?

b) Exactamente a la mitad entre $2\frac{5}{15}$ y $2\frac{6}{15}$ hay otro número, ¿cuál es?

c) Sin dividir en la recta, encuentren las siguientes equivalencias:

$$2\frac{6}{15} = 2\frac{\square}{45}$$

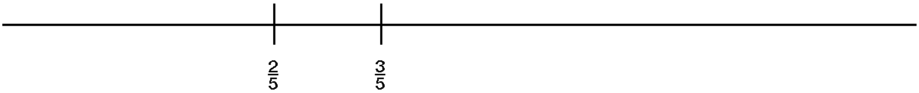
$$2\frac{5}{15} = 2\frac{\square}{45}$$

d) Entre $2\frac{2}{5}$ y $2\frac{1}{3}$ hay dos fracciones con denominador 45, ¿cuáles son?

Encuentren tres posibles saltos más altos que $2\frac{1}{3}$ m (Stefen Hölm), pero más bajos que $2\frac{2}{5}$ m (Charles Austin):

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente recta numérica ubica el número $\frac{1}{2}$:



Encuentra tres números que estén entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. Localízalos en la recta.

2. Encuentra tres números que estén entre $1\frac{3}{7}$ y $1\frac{5}{7}$. Localízalos en la siguiente recta numérica:

EL SALTO DE LONGITUD Y LOS NÚMEROS DECIMALES

SESIÓN 3

>>> Para empezar

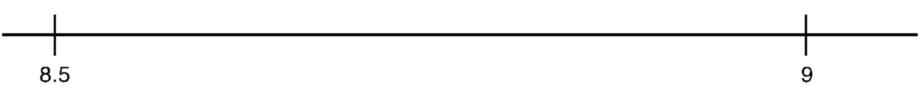
Otra de las pruebas atléticas más emocionantes es la del salto de longitud. Como verán, al igual que las fracciones, los decimales juegan un papel sumamente importante en las decisiones que los jueces toman para saber quién es el ganador de una prueba.

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente tabla muestra las mejores marcas de la prueba de salto de longitud en la categoría varonil.

MEJOR MARCA MUNDIAL DE ATLETISMO	MEJOR MARCA EN JUEGOS OLÍMPICOS	MEJOR MARCA EN LOS JUEGOS OLÍMPICOS DE ATENAS (2004)
Mike Powell (EEUU) 8.95 m	Bob Beamon (EEUU) 8.9 m	Dwight Phillips (EEUU) 8.59 m

Localicen en la siguiente recta cada una de estas marcas.



a) ¿Superó Dwight Phillips la marca de Bob Beamon? ______________________

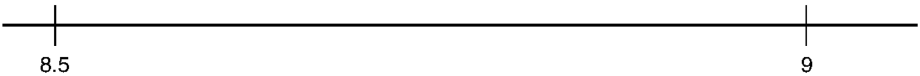
b) ¿Superó Dwight Phillips la marca de Mike Powell? ______________________

Comparen sus procedimientos con los de sus compañeros y comenten:
En una escuela dicen que 8.59 es más grande que 8.9, porque 59 es mayor que 9.
¿Ustedes qué opinan, cuál será más grande? ¿Por qué?

>>> Manos a la obra

I. Realicen las siguientes actividades:

a) Localicen en la recta los números $8\frac{5}{10}$, $8\frac{6}{10}$, $8\frac{7}{10}$, $8\frac{8}{10}$ y $8\frac{9}{10}$.



b) Escriban las marcas de Powell, Beamon y Phillips en forma de número fraccionario mixto:

Powell: $8.95 = 8\frac{\square}{100}$

Beamon: $8.9 = 8\frac{\square}{10}$

Phillips: $8.59 = 8\frac{\square}{100}$

Recuerda que:

Los números fraccionarios decimales se pueden escribir como fracción con denominador 10, 100, 1000, etc., dependiendo de si el número decimal tiene décimos, centésimos, milésimos, etcétera.

Por ejemplo, $8.5 = 8\frac{5}{10}$

c) ¿A cuántos centésimos equivalen 9 décimos? ______

d) ¿Qué número es mayor $8\frac{90}{100}$ o $8\frac{59}{100}$? ______

e) En la recta anterior localicen los números: $8\frac{95}{100}$, $8\frac{90}{100}$ y $8\frac{59}{100}$.

Comenten:

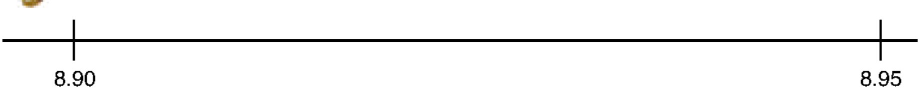
¿En qué se equivocaron en la respuesta de la otra escuela?

II. En las rondas eliminatorias para el Campeonato Mundial de 2005 hubo cinco competidores con mejores marcas que Beamon, pero no igualaron la marca de Powell. Todos estos competidores tuvieron marcas distintas.

a) ¿Cuánto pudieron haber saltado estos competidores?

______ ______ ______ ______ ______

b) Ubiquen sus saltos en la siguiente recta:



Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten:

a) ¿Encontraron las mismas distancias para los saltos?

b) Si se divide a la mitad el segmento que va de 8.90 a 8.91, se encuentra el número 8.905. ¿Qué número se encuentra si se divide a la mitad el segmento que va de 8.91 a 8.92?

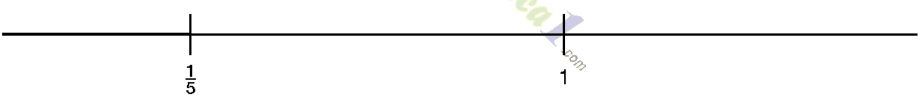
>>> A lo que llegamos

Entre cualquier par de números decimales siempre hay otros números decimales. Ésta es una propiedad que se conoce como propiedad de densidad de los números decimales.

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente recta numérica localiza los números 0.5 y $\frac{7}{4}$. Después encuentra dos números que estén entre ellos.

2. En la siguiente recta numérica localiza los números $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}$, 0.4, 0, $\frac{3}{5}$:



a) ¿Cuál es el mayor de los números que localizaste? ____________________

b) Y, ¿cuál es el menor? ____________________

c) Encuentra y localiza dos números que estén entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$.

>>> Para saber más

Sobre las distintas maneras de representar números enteros consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Marvan, Luz María. "Escritura decimal infinita" y "Otros símbolos para números no enteros" en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana Libros del Rincón, 2003.

Sobre las distintas maneras de interpretar los números escritos en forma de fracción consulta:

Marvan, Luz María. *Andrea y las fracciones*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre la distribución de la población en el país consulta:
http://www.inegi.gob.mx/inegi/default.asp [Fecha de consulta: 23 mayo 2006].
Ruta: entrar al acceso directo *II Conteo de Población y Vivienda 2005*.
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Sucesiones de números y figuras

En esta secuencia construirás sucesiones a partir de una regla dada y determinarás expresiones generales para definir las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

SESIÓN 1

FIGURAS QUE CRECEN

>>> Para empezar

Figuras que crecen

Una sucesión de figuras es un conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite obtener todas las figuras del conjunto, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión, luego la que ocupa el segundo, luego la que ocupa el tercero y así sucesivamente. Se llama figura **1** a la que ocupa el primer lugar en la sucesión, figura **2** a la que ocupa el segundo, figura **3** a la que ocupa el tercero y así sucesivamente.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen la siguiente sucesión de figuras.

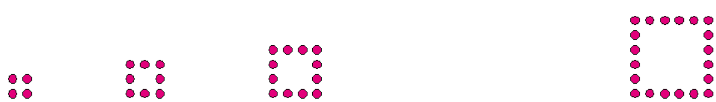


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

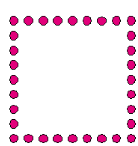


Figura 6 Figura 7 Figura 8 Figura 9

b) Completen la tabla para encontrar cuántos puntos tienen algunas de las figuras de la sucesión. Si es necesario dibujen las figuras en sus cuadernos.

Número de la figura	Número de puntos de la figura	Número de la figura	Número de puntos de la figura
1	4	8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	
6		13	
7		14	

Comparen sus tablas y comenten:

a) ¿Cómo calcularon el número de puntos de la figura 14?

b) ¿Cómo calcularían el número de puntos de cualquiera de las figuras?

>>> Manos a la obra

I. ¿Cuáles de los siguientes procedimientos sirven para encontrar el número total de puntos de cualquiera de las figuras de la sucesión? Subráyenlos.

- Multiplicar por 4 el número de puntos que tiene la figura en cada lado.
- Se le suman 4 puntos al número de puntos de la figura anterior.
- Son los múltiplos de 4.
- Es el número de la figura multiplicado por 4.

> *Recuerden que:*
>
> *Los múltiplos de 4 son los números que se obtienen al multiplicar el número 4 por algún otro número.*
> *Por ejemplo, 12 es múltiplo de 4 porque:*
> *$4 \times 3 = 12$.*

Comparen sus respuestas. Usen los procedimientos que escogieron para contestar:

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 15? ____________

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 20? ____________

II. Contesten:

a) Escriban el número que corresponde a cada una de las figuras de la derecha.

b) ¿Qué figura tendría 56 puntos? ____________

c) ¿Qué figura tendría 72 puntos? ____________

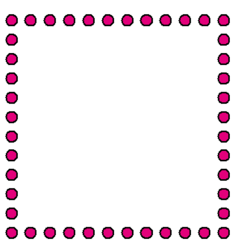


Figura ____________

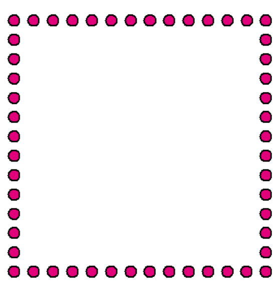


Figura ____________

Comenten:

¿Por qué no hay figuras con un número impar de puntos: 1, 3, 5, 7, 9, ...?

>>> A lo que llegamos

A los procedimientos que dicen cómo obtener el número de puntos de cada figura en una sucesión se les llama **reglas**. Por ejemplo, en la anterior sucesión de figuras, el procedimiento **son los múltiplos de 4** es una regla que permite encontrar el número de puntos que tiene cada figura.

Cuando hay varias reglas para obtener el número de puntos de cada figura en una sucesión se dice que son **reglas equivalentes**. En el ejemplo, las siguientes reglas son equivalentes:

- **Se le suman 4 puntos al número de puntos de la figura anterior.**
- **Son los múltiplos de 4.**
- **Es el número de la figura multiplicado por 4.**

>>> Lo que aprendimos

1. Completen la siguiente sucesión de figuras:

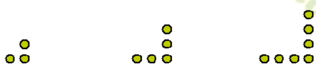


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Figura 6 Figura 7 Figura 8 Figura 9

a) ¿Cuáles de las siguientes reglas sirven para encontrar el número de puntos de cualquiera de las figuras de la sucesión? Subráyenlas.

- El número de puntos de la figura anterior más 2 puntos.
- Los números impares.
- Multiplicar por 2 el número de la figura y sumar 1.

b) Usando la regla que escogieron, completen la siguiente tabla para calcular el número de puntos de algunas de las figuras de la sucesión.

Número de la figura	Número de puntos
1	
2	
3	
4	
5	
8	
10	
15	
20	
25	
30	

Comparen sus tablas y las reglas que escogieron. Encuentren las reglas que son equivalentes.

2. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué figura tiene 51 puntos? ______________________________

b) ¿Qué figura tiene 61 puntos? ______________________________

c) ¿Habrá alguna figura con 62 puntos? ______________________________

Expliquen en sus cuadernos por qué.

Comenten:

a) ¿Por qué la siguiente figura no aparece en la sucesión?

b) ¿Por qué en la sucesión no hay figuras que tengan un número par de puntos: 2, 4, 6, 8, ...?

NÚMEROS QUE CRECEN

>>> Para empezar

En una sucesión de números, como: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Se llama **primer término** al número que ocupa el primer lugar en la sucesión, en el ejemplo el primer término es 2.

Se llama **segundo término** al número que está en el segundo lugar en la sucesión, en el ejemplo el segundo término es 4.

Se llama **tercer término** al número que está en el tercer lugar, en el ejemplo el tercer término es 6, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen la siguiente sucesión de números:

3, ____, 9, 12, ____, 18, ____, ____, 27, ____,33, ____, ____, 42, ____, 48, ____, 54, ____, 60, ____, ...

b) Escriban en sus cuadernos una regla para obtener cualquiera de los términos de la sucesión.

Comparen sus respuestas y las reglas que escribieron.

>>> Manos a la obra

I. Usando la regla que escribieron completen la siguiente tabla (observen que la tabla inicia con el término que ocupa el lugar 21):

Lugar del término	Término de la sucesión
21	
22	
23	
24	
25	
30	
	93
40	
	123
	126
50	
	180

a) ¿Cuál es el término de la sucesión que está en el lugar 40? ______________________

b) ¿Cuál es el término de la sucesión que está en el lugar 24? ______________________

c) ¿En qué lugar está el término 30? ______________________

d) ¿En qué lugar está el término 123? ______________________

II. De las siguientes reglas, ¿cuáles son equivalentes a la que ustedes encontraron para obtener los términos de la sucesión? Subráyenlas.

- Sumar 3 al lugar del término.
- Sumar 3 al término anterior.
- Los múltiplos de 3.
- Multiplicar por 3 el lugar del término.

Comparen sus tablas y sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Las reglas que sirven para obtener los términos de una sucesión se pueden dar a partir del lugar del término, por ejemplo multiplicar por 3 el lugar del término.

III. En la columna izquierda se presentan los primeros términos de algunas sucesiones y en la columna derecha, algunas reglas que permiten encontrar estas sucesiones. Relacionen ambas columnas.

¡Cuidado: algunas de las sucesiones se pueden obtener usando dos reglas!

Términos de la sucesión	Reglas
( ) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …	(A) Sumar cuatro al término anterior.
( ) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, …	(B) Los números pares.
( ) 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, …	(C) Multiplicar el lugar del término por 4.
( ) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, …	(D) Multiplicar el lugar del término por 5.
( ) 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 45, …	(E) Multiplicar el lugar del término por 5 y sumar 4.
	(F) Multiplicar el lugar del término por 2.

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuáles de las reglas anteriores son equivalentes?

Recuerden que:

Dos reglas son equivalentes si con las dos se obtienen los términos de la misma sucesión.

>>> Lo que aprendimos

Un juego en parejas:

- El primer jugador inventa una regla y la escribe en su cuaderno (sin que la vea su compañero). Luego, usando la regla, escribe los primeros ocho términos de la sucesión y se los enseña a su compañero.
- El segundo jugador escribe una regla para obtener la sucesión.
- Los dos jugadores verifican si con la regla del segundo se obtienen los términos de la sucesión planteada por el primero (es decir, si el segundo jugador escribió la regla correcta). De ser así, el segundo jugador *gana* un punto.
- Se empieza nuevamente el juego intercambiando los papeles de los jugadores.

SESIÓN 3

REGLA DE SUCESIONES

>>> Para empezar

En las sesiones anteriores aprendieron a escribir reglas que describen las sucesiones de números y figuras usando palabras. En esta sesión aprenderán otra forma de escribir estas mismas reglas utilizando el lugar que ocupa el término en la sucesión.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la siguiente sucesión de números y contesten las preguntas.

7, 14, 21, ____, 35, ____, ____, 56, 63, ____,77, ____, ____, 98, ____, 112, ____, ...

a) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 4**? ____________

b) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 10**? ____________

c) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término del **lugar 20**? ____________

d) Usen la letra n para representar el número del lugar y escriban una regla para encontrar el término del **lugar** n. ________________________

____

____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular algunos de los términos de la sucesión y respondan las preguntas. Usen las reglas que encontraron.

Lugar del término	Término de la sucesión
1	7
2	14
3	21
4	
5	35
6	
7	
8	56
	63
10	
15	
	140
25	
	210
40	

a) ¿Entre qué número dividen el **63** para encontrar el **lugar** que ocupa en la sucesión? __________

b) ¿Entre qué número dividen el **210** para encontrar el **lugar** que ocupa en la sucesión? __________

c) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar 30**? __________

d) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar 40**? __________

e) ¿Qué multiplicación hicieron para encontrar el término que está en el **lugar** n? __________

II. En una telesecundaria escribieron las siguientes reglas para encontrar el término que está en el **lugar** ***n***, ¿con cuáles de estas reglas están ustedes de acuerdo? Subráyenlas.

- Sumar n más **7**.
- Multiplicar por **7**.
- Sumar **7** al término anterior.
- Multiplicar n por **7**.

Comparen sus respuestas y encuentren las reglas que son equivalentes.

III. Usando las reglas que encontraron contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el término que está en el lugar 100? ______________________

b) ¿Cuál es el término que está en el lugar 150? ______________________

c) ¿Cuál es el término que está en el lugar 300? ______________________

d) ¿En qué lugar está el término 777? ______________________

IV. Completen la siguiente sucesión de figuras y contesten las preguntas.

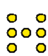


Figura 1

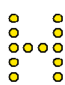


Figura 2

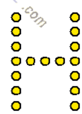


Figura 3

Figura 4

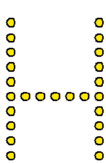


Figura 5

Figura 6

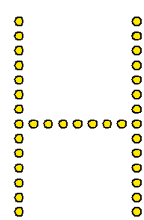


Figura 7

a) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **4**? ____________

b) ¿Cuántos puntos tiene la figura **7**? ____________

c) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **9**? ____________

d) ¿Cuántos puntos tendrá la figura **10**? ____________

e) ¿Cuáles de las siguientes reglas permiten encontrar el número de puntos de la figura que está en el **lugar** n? Subráyenlas.

- Sumar **5** al término anterior.
- $5n + 2$.
- Multiplicar n por **5** y sumar **2**.

f) Usando la regla que eligieron completen la siguiente tabla para obtener el número de puntos de algunas de las figuras de la sucesión.

Lugar de la figura	Número de puntos de la figura
1	7
2	12
3	17
4	
5	27
6	
7	37
8	
9	
10	
20	
25	
30	
100	

>>> A lo que llegamos

Las reglas que sirven para obtener los términos de una sucesión se pueden dar a partir del lugar del término de la sucesión.

Por ejemplo, la regla **multiplicar el lugar del término por 7** se puede escribir usando la letra n como:

- **multiplicar 7 por** n.
- **7 por** n.

Por convención, $7 \times n$ se puede escribir como: $7n$.

Entonces:

- El término que está en el primer lugar es igual a $7 \times 1 = 7$.
- El término que está en el segundo lugar es igual a $7 \times 2 = 14$.
- El término que está en el tercer lugar es igual a $7 \times 3 = 21$.
- El término que está en el **lugar** n es igual a $7 \times n$.

>>> Lo que aprendimos

Completa la siguiente sucesión de figuras y contesta las preguntas.

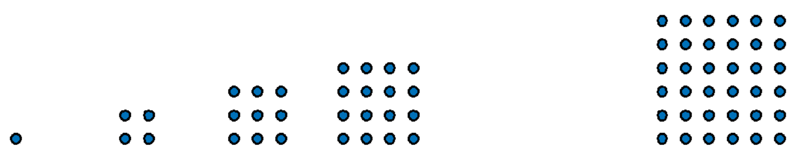


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

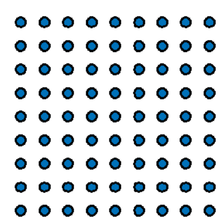


Figura 7 Figura 8 Figura 9

a) ¿Qué figura tendrá 25 puntos ? ____________________

b) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 8? ____________________

c) ¿Qué figura tendrá 100 puntos? ____________________

d) ¿Cuántos puntos tendrá la figura 20? ____________________

e) Escribe una regla para calcular el número de puntos de la figura del lugar *n*:

____

____

____

>>> Para saber más

Sobre las sucesiones de números y patrones consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Ruiz, Concepción y Sergio De Régules. "Aventuras Fractales" en *El Piropo matemático. De los números a las estrellas*. México: SEP/Editorial Lectorum, Libros del Rincón, 2003.

Sobre patrones que aparecen en la naturaleza como la razón áurea y los fractales consulta: http://www.interactiva.matem.unam.mx
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Ruta para la razón áurea: SECUNDARIA → RAZÓN ÁUREA (dar clic en el dibujo de Nautilus).
Ruta para fractales: BACHILLERATO Y LICENCIATURA → FRACTALES (dar clic en el dibujo de la Curva de Koch).
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

Geometría y expresiones algebraicas

En esta secuencia explicarás en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar.

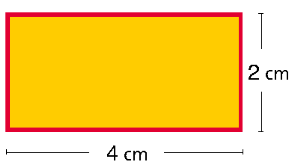
SESIÓN 1

FÓRMULAS Y PERÍMETROS

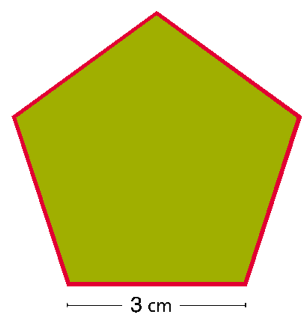
>>> Para empezar

Fórmulas y perímetros

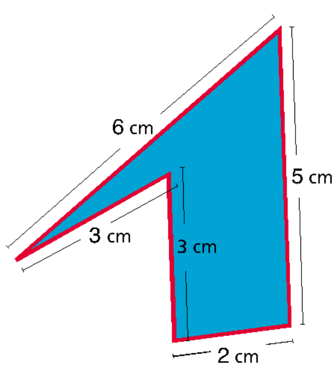
Recuerda que el perímetro de una figura geométrica es la medida de su contorno. A continuación se calcula el perímetro de un rectángulo, de un pentágono regular (de lados y ángulos iguales) y el de un polígono irregular; observa que el contorno está resaltado con una línea roja.



Perímetro = 4 cm + 2 cm + 4 cm + 2 cm = 12 cm



Perímetro = 5 × 3 cm = 15 cm



Perímetro = 6 cm + 5 cm + 2 cm + 3 cm + 3 cm = 19 cm

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la siguiente tabla para calcular el perímetro de algunos cuadrados de distintos tamaños:

Medida del lado (cm)	Perímetro (cm)
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
20	
25	

Tabla 1

a) ¿Cómo se obtiene el perímetro de un cuadrado? ____________________

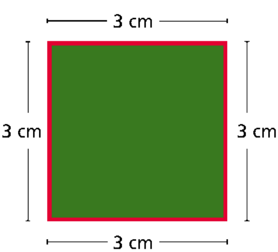
____

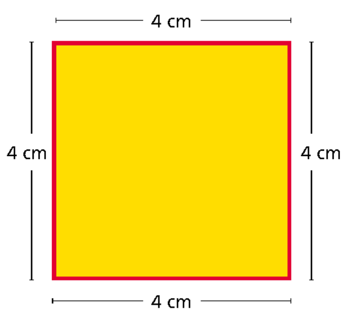
b) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x cm? ____________

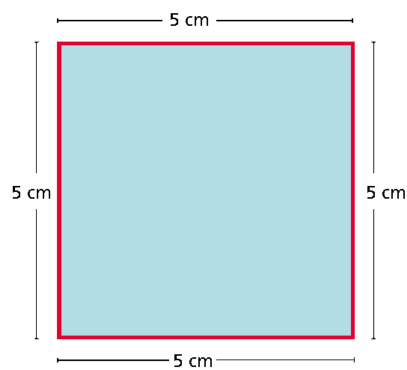
Comparen sus tablas y comenten sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Calculen el perímetro de los siguientes cuadrados:







Perímetro: ____________ **Perímetro:** ____________ **Perímetro:** ____________

¿Cómo se calcula el perímetro de cualquier cuadrado? ____________________

____

II. En una escuela escribieron las siguientes expresiones para calcular el perímetro de un cuadrado cuyo lado mide x cm. Subrayen las correctas.

- $x + 4$;
- $x \times 4$;
- $x + x + x + x$;
- x por **4**;
- **4** por x.

Comenten en grupo las expresiones que creen que son correctas y contesten:

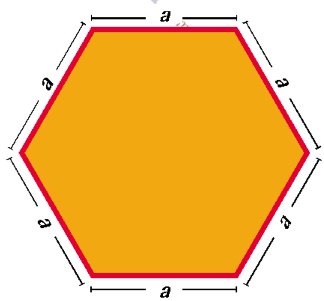
a) ¿Cómo usarían las expresiones para calcular el perímetro de un cuadrado de lado 30 cm?

b) ¿Cuáles de las expresiones les dan los mismos resultados?

>>> A lo que llegamos

Dos expresiones para calcular el perímetro son equivalentes si siempre dan los mismos resultados. Por ejemplo, las expresiones $x + x + x + x$ y 4 por x son equivalentes.

III. La siguiente figura es un hexágono regular.



a) Encuentren y subrayen las expresiones correctas para calcular el perímetro del hexágono:

$6 \times a$	$6a$
$3a + 3a$	6 + a
$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$	$a + a + a + a + a + a$
$a \times 6$	$a + 6$

Tabla 2

b) Usando las expresiones que escogieron llenen la siguiente tabla para calcular el perímetro de algunos hexágonos.

Anoten en el primer renglón las expresiones que encontraron.

Lado (cm)					
2					
4					
10.5					

Tabla 3

>>> A lo que llegamos

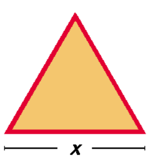
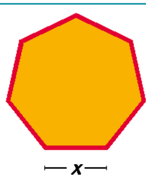
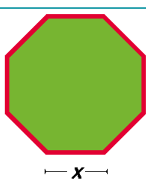
Las expresiones como las de la tabla 2 se llaman **expresiones algebraicas**.

Las expresiones algebraicas $a + a + a + a + a + a$, $3a + 3a$, $a \times 6$, $6 \times a$ y $6a$ son equivalentes y sirven para calcular el perímetro de un hexágono con medida de lado igual que a.

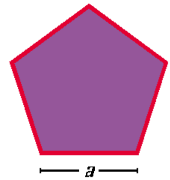
Por convención, $6 \times a$ también se escribe $6a$.

>>> Lo que aprendimos

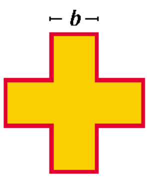
1. Relaciona las columnas escribiendo en el paréntesis la letra que corresponda.

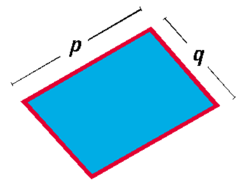
(A) 	( ) $3 \times x$
(B) 	( ) $x + x + x + x + x + x + x$
(C) 	( ) $8 + x$
	( ) $8 \times x$
	( ) $x + 6$

2. Escriban las expresiones algebraicas que sirven para calcular los perímetros de las siguientes figuras geométricas:



Expresión: ______________________ Expresión: ______________________





Expresión: ______________________ Expresión: ______________________

SESIÓN 2

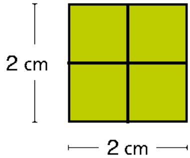
FÓRMULAS Y ÁREAS

>>> Para empezar

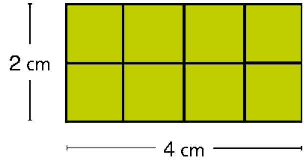
El **área** de una figura es la cantidad de unidades de superficie que caben en su interior.

Un ejemplo de unidad de superficie es un centímetro cuadrado, que es de este tamaño y se abrevia **cm²**.

Por ejemplo, el área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho; en el caso del cuadrado, ambas medidas son iguales, por lo que se multiplica lado por lado.



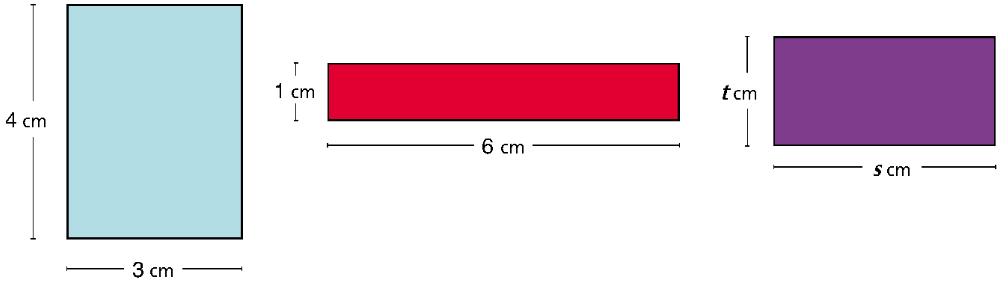
Área = 4 cm^2



Área = 8 cm^2

>>> Consideremos lo siguiente

Observen los siguientes rectángulos



a) ¿Cuánto mide el área del rectángulo azul? ______________________

b) ¿Cuánto mide el área del rectángulo rojo? ______________________

c) ¿Cuánto mide el área del rectángulo morado? ______________________

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla:

Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
2	1	
4	3	
5	2	
6	2	
6	5	
7	4	
8	3	
8	6	
9	7	
10	2	
10	3	

Comparen sus tablas y comenten cómo las completaron.

II. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas sirven para calcular el área del rectángulo que mide de largo s y de ancho t? Subráyenlas.

- $s + t + s + t$.
- $s + t$.
- st.
- $s \times t$.
- $s \times s \times t \times t$.
- $t \times s$.

Comparen sus respuestas y usen las expresiones que escogieron para calcular:

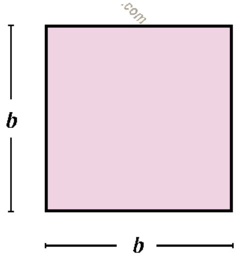
a) El área de un rectángulo que mide de largo **15** cm y de ancho **8** cm.

b) El área de un rectángulo que mide de largo **3** m y de ancho **2** m.

>>> A lo que llegamos

Las expresiones $s \times t$ y st son expresiones algebraicas para calcular el área de un rectángulo de largo s y ancho t. Por convención, $s \times t$ se escribe st.

III. La siguiente figura es un cuadrado cuyo lado mide b:



a) Subrayen las expresiones correctas para calcular el área del cuadrado anterior:

$4 \times b$	$4b$
$b + b$	$4 + b$
$b + b + b + b$	bb
$b \times b$	

b) Usando las expresiones que escogieron, llenen la siguiente tabla para calcular el área de algunos cuadrados.

Anoten en el primer renglón las expresiones que encontraron.

Lado		
3 cm		
2.5 cm		
2 m		

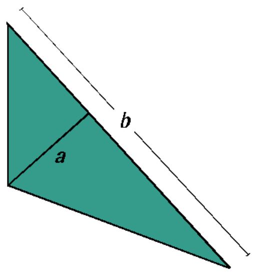
Comparen sus expresiones.

>>> Lo que aprendimos

1. a) Escribe una expresión algebraica que permita calcular el área del siguiente triángulo:

Recuerda que:

El área de un triángulo se calcula multiplicando la medida de la base por la medida de la altura y dividiendo el resultado entre dos.



Expresión: ____________________

b) Usa la expresión que escribiste para calcular el área de los triángulos con las siguientes medidas:

Base (cm)	Altura (cm)	Área (cm^2)
2	1	
4	3	
2	5	
6	2	

c) Compara la expresión algebraica que escribiste y tu tabla con uno de tus compañeros. Comenten si las expresiones que encontraron son equivalentes.

>>> Para saber más

Sobre el cálculo de áreas y perímetros de distintas figuras geométricas consulta: http://descartes.cnice.mecd.es/1y2_eso/Los_cuadrilateros/Cuadrilateros2.htm [Fecha de consulta: 16 de junio 2006]. Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Simetría

En esta secuencia tendrás la oportunidad de construir figuras simétricas respecto a un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.

SESIÓN 1

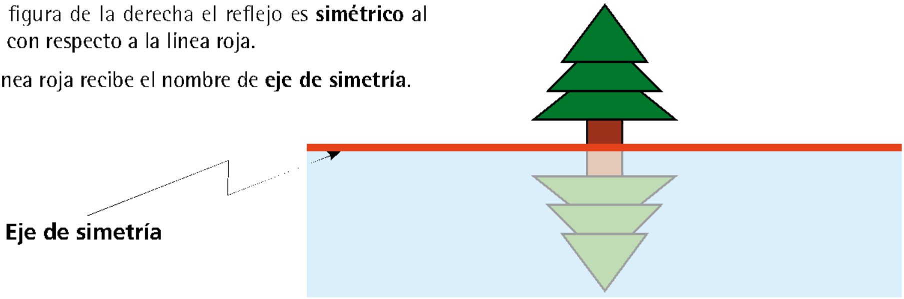
COMO SI FUERA UN ESPEJO

>>> Para empezar

El Taj Mahal se encuentra en la India y por su diseño y belleza es considerado una maravilla de la arquitectura. ¿Ya observaste cómo se refleja en el agua?

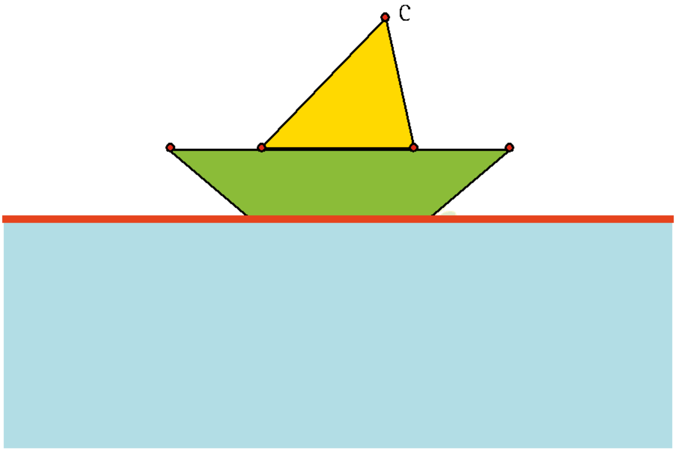
Cuando el agua está tranquila refleja las imágenes de los objetos y seres como si fuera un espejo.

- En la figura de la derecha el reflejo es **simétrico** al árbol con respecto a la línea roja.
- Esa línea roja recibe el nombre de **eje de simetría**.



>>> Consideremos lo siguiente

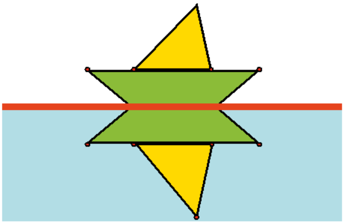
¿De qué manera podría trazarse el simétrico del barco con respecto a la línea roja? Planeen y lleven a cabo una manera para hacer el trazo con sus instrumentos geométricos.

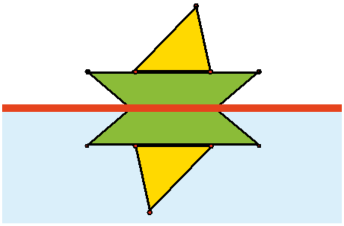


Comenten con otros equipos el procedimiento que emplearon para trazar el simétrico.

>>> Manos a la obra

I. En los siguientes dibujos el simétrico no está bien trazado. Corrígelos.

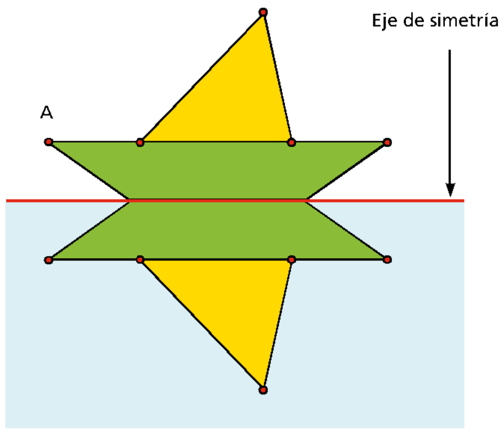




II. En el siguiente dibujo se ha trazado correctamente el simétrico del barco.

- Encuentra el punto que es el simétrico de A, nómbralo A' (se lee A prima)

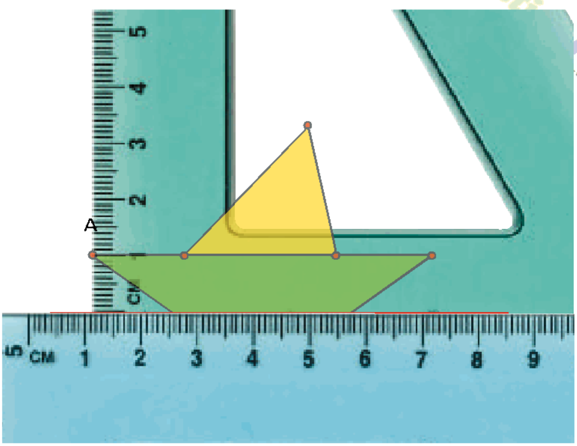
Se dice que A es el simétrico de A', o bien, que A es el correspondiente simétrico de A'.



Recuerda que:

Las perpendiculares forman ángulos de 90°. La distancia de un punto a una recta se mide por la perpendicular que va del punto a la recta.

- Usa tu regla para unir A con A', al hacerlo obtienes el **segmento AA'**.



a) ¿Cuánto mide la distancia del **punto A** al **eje de simetría**?

____

b) ¿Cuánto mide la distancia del **punto A'** al **eje de simetría**?

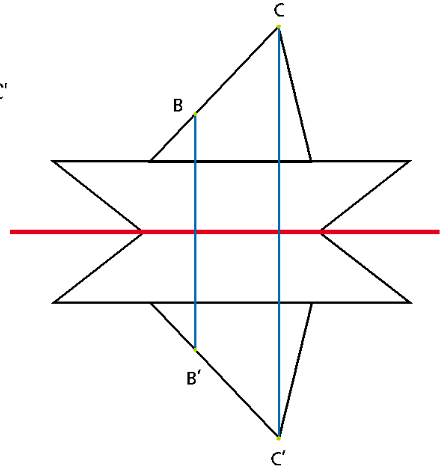
____

c) ¿Cuánto mide el ángulo que forman el **eje de simetría** y el **segmento AA'**?

____

- La distancia del punto A y de A' al eje de simetría es la misma, es decir, el punto A y A' **equidistan** del eje.
- El eje de simetría y el segmento AA' son perpendiculares.

III. Verifica que para los puntos B y C y sus simétricos se cumplen también las dos condiciones enunciadas en el recuadro anterior.



- Anota en la figura las distancias de B, B', C, C' al eje y la medida de los ángulos que forman el segmento BB' y CC' con el eje.

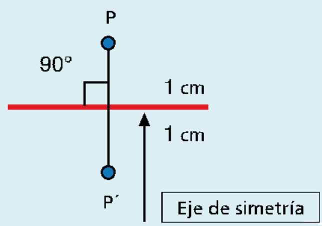
- Elige otros dos puntos y sus simétricos y verifica que también se cumplen las condiciones mencionadas.

Esto que exploraste con algunas parejas de puntos simétricos pasa con cualquier pareja de puntos simétricos.

IV. Verifica en el problema inicial que los puntos rojos y sus simétricos también cumplen esas dos condiciones.

>>> A lo que llegamos

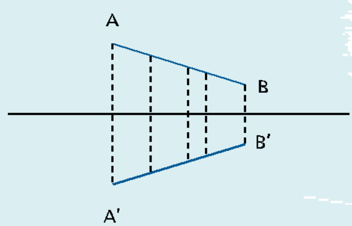
Un punto es simétrico a otro con respecto a una recta si y sólo si se cumple que ambos puntos equidistan de la recta y el segmento que los une es perpendicular a la recta.



El simétrico de un segmento con respecto a una recta es otro segmento.

Todos y cada uno de los puntos del segmento AB tienen su correspondiente simétrico en el segmento A′B′.

El segmento A′B′ es el correspondiente simétrico del segmento AB

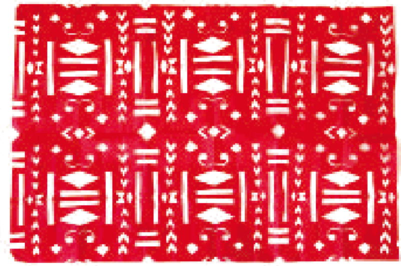


SESIÓN 2

PAPEL PICADO

>>> Para empezar

¿Te has fijado en las figuras que se forman cuando se hace papel picado?



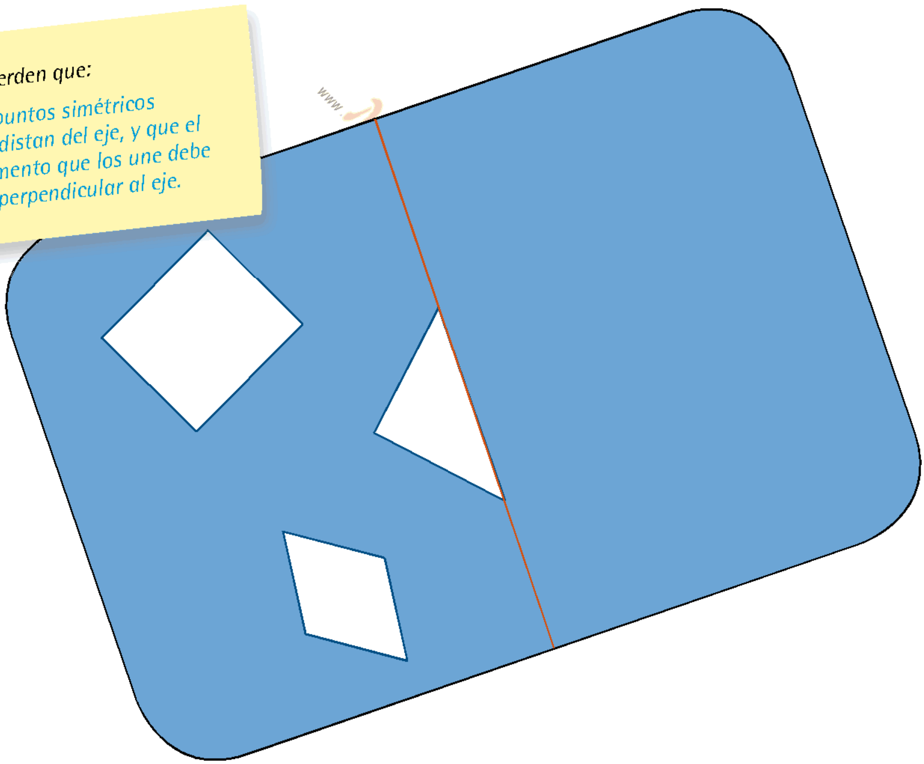
Muchos de los diseños de papel picado son composiciones de figuras simétricas con respecto a un eje.

>>> Consideremos lo siguiente

Planeen y lleven a cabo una estrategia para terminar el siguiente papel picado de tal manera que sea una composición simétrica respecto a la línea roja.

Recuerden que:

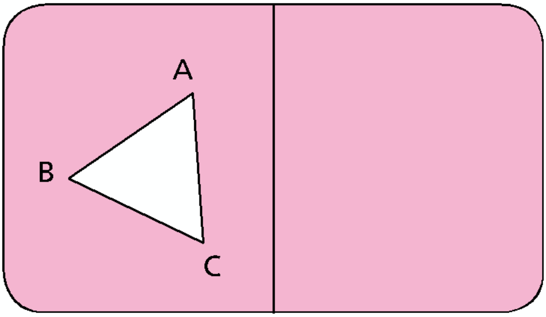
Los puntos simétricos equidistan del eje, y que el segmento que los une debe ser perpendicular al eje.



Comenten en grupo el procedimiento que siguieron para terminar el diseño del papel picado. En particular digan cómo le hicieron para que un punto y su simétrico queden a la misma distancia del eje.

>>> Manos a la obra

I. Se quiere trazar el simétrico de este triángulo con respecto al eje



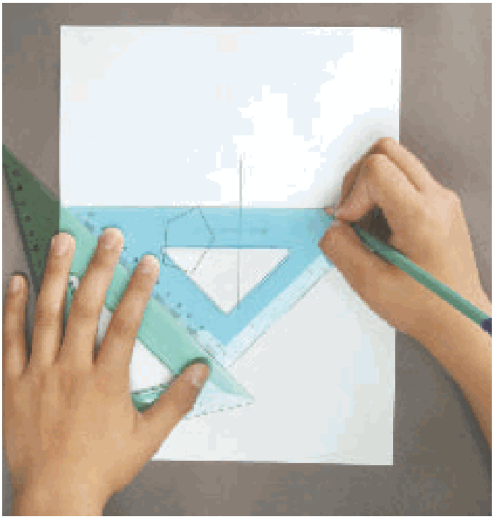
a) ¿Será necesario trazar el simétrico de todos y cada uno de los puntos del triángulo? ______________________________

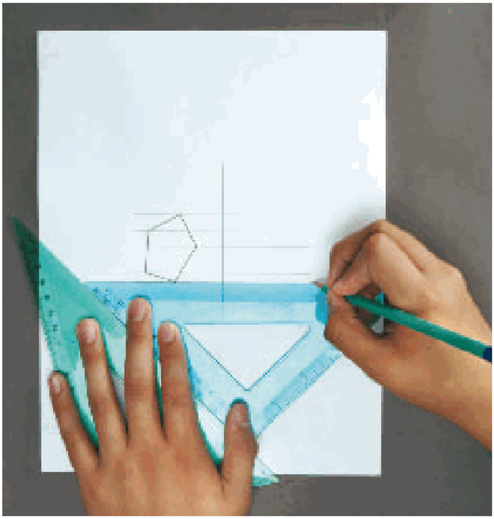
b) ¿Cuáles puntos hay que localizar para trazar el triángulo simétrico?

____

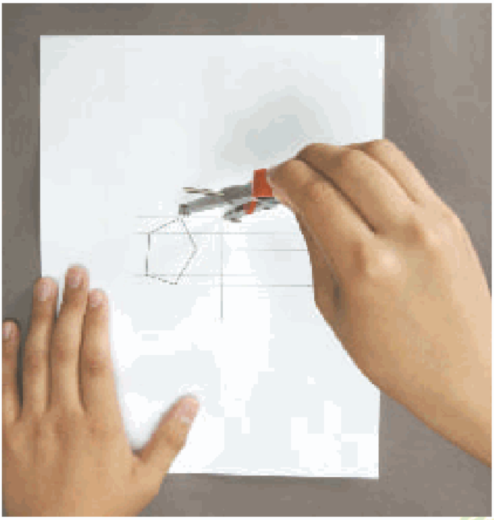
II. El siguiente es un procedimiento que puede emplearse para trazar figuras simétricas con respecto a un eje.

a) Se traza una perpendicular por cada vértice al eje de simetría. Para ello, primero se colocan las escuadras de manera similar al dibujo de la página 62, para trazar un segemento perpendicular el eje; después se prolonga este segmento hasta el otro lado del eje. Esto se hace en cada vértice.

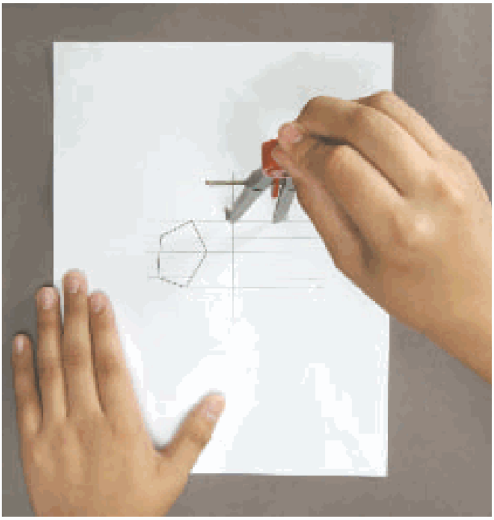




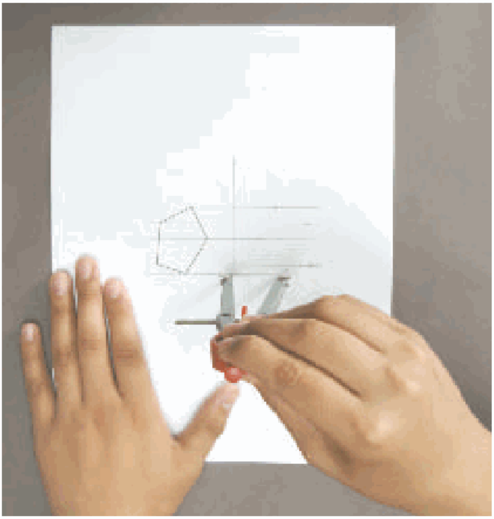
b) Con el compás se toma la medida de la distancia de un punto al eje (puede hacerse con la regla, pero con el compás es más preciso). Observa cómo.



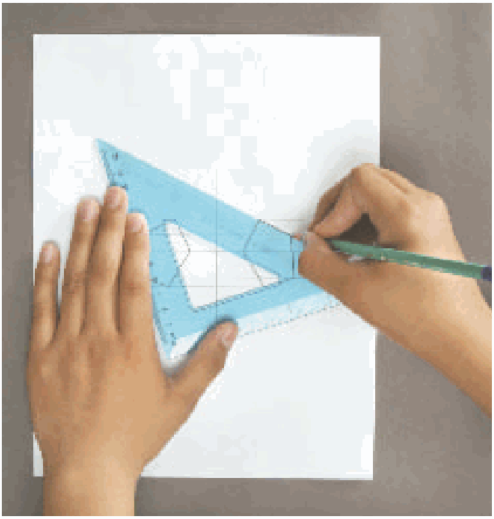
c) Con esa misma abertura se localiza el simétrico de ese punto.



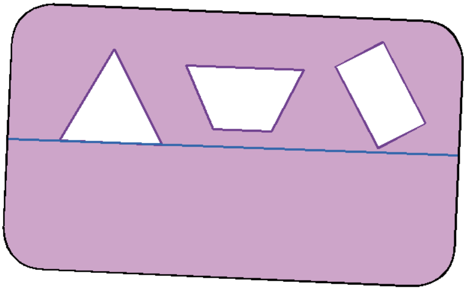
d) Se repite lo indicado en b) y c) en cada vértice de la figura.



e) Se unen los vértices para obtener la figura buscada.



III. Utiliza el procedimiento descrito para completar el dibujo del siguiente papel picado, de tal manera que sea simétrico con respecto a la línea azul.



IV. En tu cuaderno traza un triángulo equilátero y una recta exterior al triángulo, después traza su simétrico con respecto a la recta. Haz lo mismo con un rombo.

>>> A lo que llegamos

Para construir un polígono simétrico a otro con respecto a una recta:

1. **Se traza una perpendicular a la recta por cada vértice de la figura.**
2. **Sobre la perpendicular que se trazó se toma la distancia de cada vértice a la recta y se traslada esa misma distancia del otro lado de la recta. Se puede utilizar la regla o el compás.**
3. **Se unen los vértices encontrados para formar el polígono.**

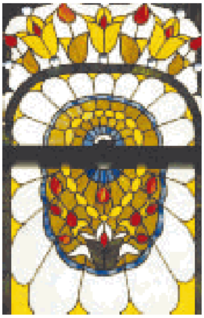
En pocas palabras: se traza el simétrico de cada vértice con respecto a la recta y se unen.

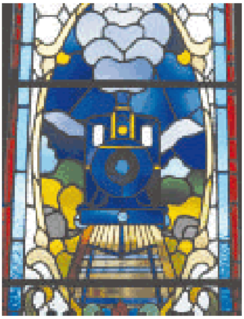
LOS VITRALES

SESIÓN 3

>>> Para empezar

¿Conoces los vitrales? Son composiciones de vidrios de colores, su magia está en la luz que a lo largo del día dejan pasar. La simetría también está presente en algunos vitrales.





>>> Consideremos lo siguiente

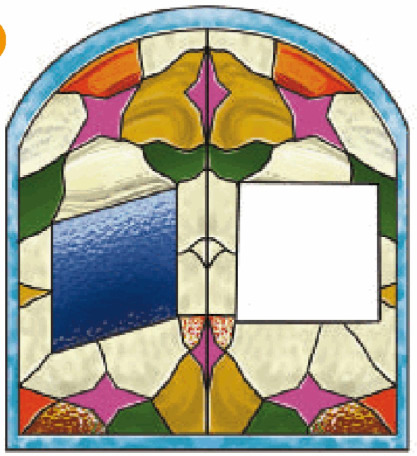
Determinen y coloreen el rombo que ha sido bien trazado para que el vitral sea simétrico con respecto a la línea vertical.

1

2

3

4



¿En qué se fijaron para elegir las figuras? ______________________________

____

____

Comenten sus respuestas con sus compañeros del grupo, no olviden mencionar en qué se fijaron para elegir las figuras.

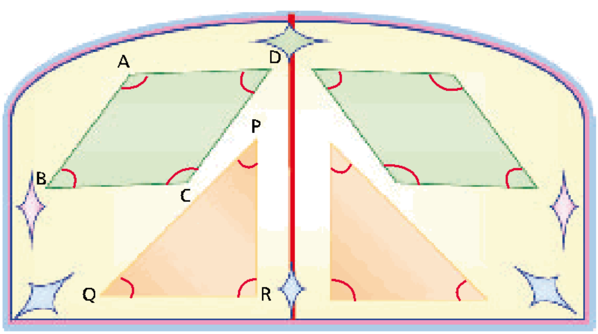
>>> Manos a la obra

I. Anota si estás o no de acuerdo con las siguientes afirmaciones; en cada caso explica por qué.

Afirmación	¿De acuerdo?	¿Por qué?
El vitral simétrico es el 3 porque los ángulos del rombo de la derecha son iguales a sus ángulos correspondientes del rombo azul.		
El vitral simétrico es el 4 porque los lados de la figura de la derecha miden lo mismo que sus correspondientes del rombo de la izquierda.		
El vitral simétrico es el 1 porque los dos rombos tienen sus lados y ángulos correspondientes iguales.		

II. El siguiente vitral es simétrico con respecto al eje rojo.

Nombra A' al simétrico de A, B' al simétrico de B y así sucesivamente. Mide lo que se requiere y completa las tablas.



Medida del segmento (cm)		Medida de su simétrico (cm)	
$\overline{AB}$		$\overline{A'B'}$	
$\overline{BC}$		$\overline{B'C'}$	
$\overline{CD}$		$\overline{C'D'}$	
$\overline{DA}$		$\overline{D'A'}$	
$\overline{PQ}$		$\overline{P'Q'}$	
$\overline{QR}$		$\overline{Q'R'}$	
$\overline{RP}$		$\overline{R'P'}$	

Medida del ángulo (grados)		Medida del ángulo (grados)	
$\angle A$		$\angle A'$	
$\angle B$		$\angle B'$	
$\angle C$		$\angle C'$	
$\angle D$		$\angle D'$	
$\angle P$		$\angle P'$	
$\angle Q$		$\angle Q'$	
$\angle R$		$\angle R'$	

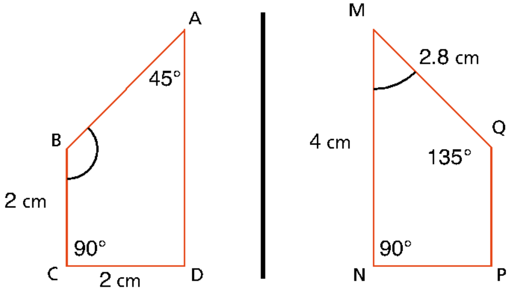
a) ¿Cómo son entre sí la medida de un segmento y su simétrico?

____

b) ¿Cómo son entre sí la medida de un ángulo y su correspondiente?

____

III. Las siguientes son figuras simétricas con respecto al eje; **sin medir**, anota los datos que se piden. No olvides colocar las unidades de medida (cm y grados).



a) Lado AD = ____________

b) Lado NP = ____________

c) Lado PQ = ____________

d) Ángulo M = ____________

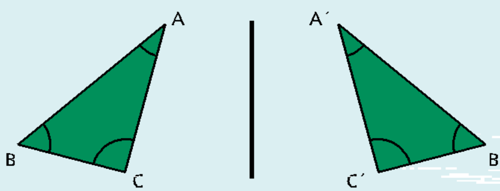
e) Ángulo B = ____________

>>> A lo que llegamos

Una figura simétrica a otra con respecto a un eje conserva la medida de los lados y de los ángulos de la figura original.

∡ A se lee ángulo A

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$
$\overline{AC} = \overline{A'C'}$
$\measuredangle A = \measuredangle A'$
$\measuredangle B = \measuredangle B'$
$\measuredangle C = \measuredangle C'$



IV. Observa en el vitral de la actividad II que:

Recuerda que:
Las rectas paralelas son las que conservan siempre la misma distancia entre sí.

$\overline{AD}$ es paralelo a $\overline{BC}$, esto se simboliza **$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$**.
$\overline{PR}$ es perpendicular a $\overline{QR}$, esto se simboliza **$\overline{PR} \perp \overline{QR}$**.

a) ¿Qué segmentos son paralelos en la figura del lado izquierdo? ____________

b) ¿Sus simétricos también son paralelos? ____________

c) ¿Qué segmentos son perpendiculares en la figura del lado izquierdo?

____

d) ¿Sus simétricos también son perpendiculares? ____________

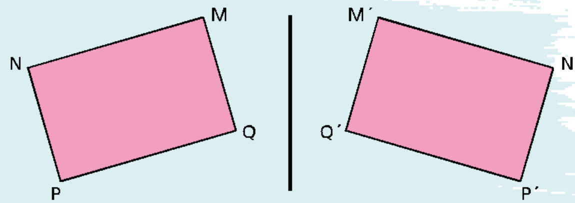
V. Considera las figuras de la actividad III. Anota el símbolo de paralelas (||) o el de perpendiculares (⊥).

Si $\overline{AD}$ ________ $\overline{CD}$ entonces $\overline{MN}$ ________ $\overline{NP}$.

Si $\overline{AD}$ ________ $\overline{BC}$ entonces $\overline{MN}$ ________ $\overline{QP}$.

>>> A lo que llegamos

Como en una simetría se conservan las medidas de los segmentos y de los ángulos, entonces, si hay lados paralelos o perpendiculares en la figura original sus simétricos también son paralelos o perpendiculares.



Si $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ entonces $\overline{M'N'} \parallel \overline{P'Q'}$.

Si $\overline{MN} \perp \overline{NP}$ entonces $\overline{M'N'} \perp \overline{N'P'}$.

Los vitrales

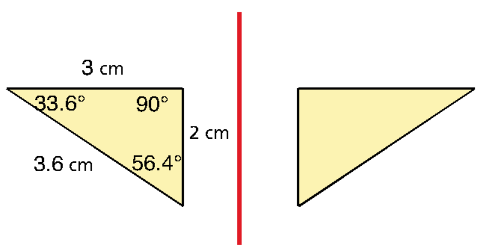
Como te has dado cuenta, la simetría permite dar belleza y armonía a diversas composiciones, como es el caso de los vitrales. Para construir un vitral simétrico es importante identificar las propiedades que se conservan en la simetría con respecto a un eje.

ALGO MÁS SOBRE SIMETRÍA

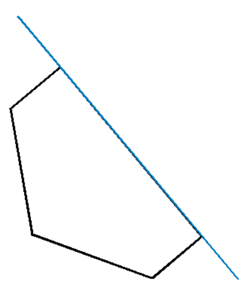
SESIÓN 4

>>> Lo que aprendimos

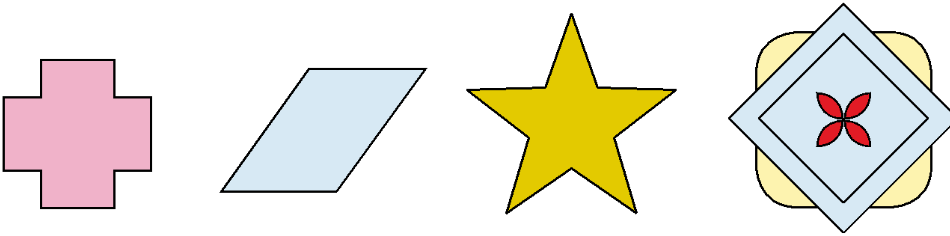
1. Estos dos triángulos son simétricos respecto al eje rojo; sin medir, escribe la medida de cada lado y de cada ángulo de la figura simétrica.



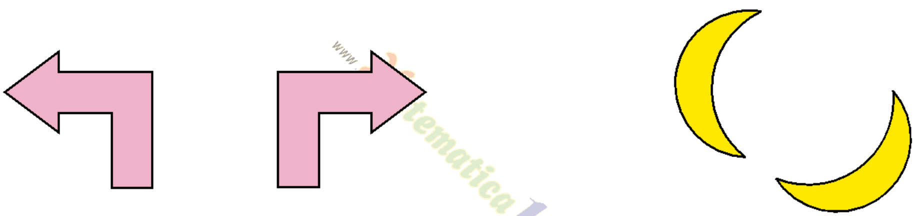
2. Completa la figura para que sea simétrica con respecto a la línea azul.



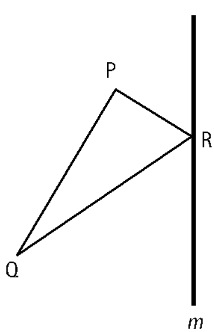
3. Traza el o los ejes de simetría (si es que tienen) de estas figuras.

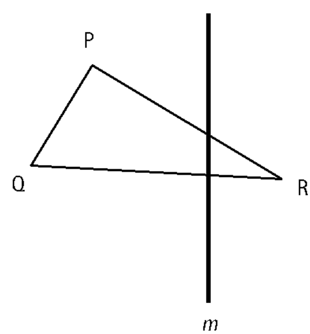


4. Traza el eje de simetría de cada pareja de figuras.

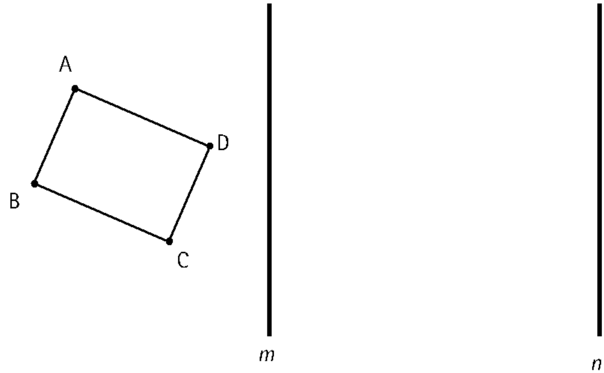


5. Traza el simétrico del triángulo PQR con respecto a la recta *m*.





6. Traza el simétrico del rectángulo ABCD con respecto a la recta *m*; obtendrás el rectángulo A'B'C'D'.



a) ¿Cuáles segmentos son paralelos en el rectángulo ABCD? ____________

b) ¿Cuáles segmentos son paralelos en el rectángulo A'B'C'D'? ____________

c) Anota dos parejas de lados perpendiculares: ____________

d) ¿Sus simétricos también son perpendiculares? ____________

7. En la figura del número 6, traza el simétrico del rectángulo A'B'C'D' con respecto a la recta *n*; obtendrás el rectángulo A''B''C''D'' (A'' se lee *A bi-prima*)

¿Puede decirse que el primer rectángulo y el rectángulo que acabas de trazar son simétricos? ________ ¿Por qué? ____________

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Lo mismo de un lado y de otro" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre cómo se usa la simetría con respecto a un eje en el funcionamiento de un pantógrafo consulta: http://www.matematicas.net/paraiso/cabri.php?id=simaxi [Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre dibujos simétricos consulta: www.google.com.mx
[Fecha de consulta: 16 de junio 2006].
Ruta: Imágenes (escribir simetría y dar clic en búsqueda de imágenes para ver dibujos simétricos).

Proporcionalidad

En esta secuencia identificarás y resolverás situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante”, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.

SESIÓN 1

LAS CANTIDADES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

>>> Para empezar

En esta sesión estudiarás los costos de distintas mezclas de colores de pintura. A la gama de colores conocidos se les llama colores compuestos y se obtienen al mezclar los tres colores primarios: amarillo, azul y rojo.

El color verde, por ejemplo, se obtiene mezclando azul y amarillo. Las distintas tonalidades de verde, más claro o más oscuro, dependen de las cantidades de colores azul y amarillo que se mezclen.

>>> Consideremos lo siguiente

Manuel es pintor y quiere saber cuánto cuesta medio litro de pintura de aceite de color verde claro. Fue a una tienda de pinturas, pero como no tenían pintura verde claro, le ofrecieron los colores que puede mezclar para obtenerla.

La siguiente tabla muestra los colores que hay que mezclar para obtener la pintura verde claro que Manuel quiere:

Recuerden que:

1 000 mililitros (1 000 ml) equivalen a 1 litro (1 l)
1 l = 1 000 ml.



Pintura azul	Pintura amarilla	Color final de la mezcla: pintura verde claro
150 mililitros	350 mililitros	500 mililitros

El costo de la pintura varía dependiendo del color. La siguiente tabla muestra los costos de los colores primarios de la pintura de aceite:

Color de la pintura	Azul	Rojo	Amarillo
Precio por litro	$300	$500	$700

Comenten y contesten:

¿Cuál es el costo de 500 ml de pintura verde claro? ______________

Comparen sus resultados y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo de otra telesecundaria hicieron el siguiente procedimiento para calcular el costo de 500 mililitros de pintura verde claro:

1 litro de pintura azul $300 + 1 litro de pintura amarilla $700 = 2 litros de pintura verde claro $1 000

Y al final dijeron: "como dos litros de pintura verde claro cuestan 1 000 pesos, entonces dividimos todo entre cuatro y tenemos que 500 mililitros cuestan $250".

Comenten

¿Consideran correcto el procedimiento que encontraron en la otra telesecundaria?

Argumenten su respuesta.

II. Cuando Manuel fue a pagar le cobraron $290.

Comenten:

¿Le cobraron bien a Manuel en la tienda?

III. Completen las siguientes tablas para calcular los costos de 150 ml de pintura azul y de 350 ml de pintura amarilla:

Cantidades de pintura azul	Costo de la pintura azul
1 000 ml	$300
100 ml	
50 ml	
150 ml	

Cantidades de pintura amarilla	Costo de la pintura amarilla
1 000 ml	$700
100 ml	
50 ml	
350 ml	

Ahora que ya saben el costo de la cantidad de pintura azul y de la cantidad de pintura amarilla que necesita Manuel para obtener el verde claro, completen lo siguiente:

Cantidad de pintura amarilla	350 ml
Costo de la pintura amarilla	_______ pesos

+

Cantidad de pintura azul	150 ml
Costo de la pintura azul	_______ pesos

=

Cantidad de pintura verde claro	500 ml
Costo de la pintura verde claro	_______ pesos

IV. Contesten las siguientes preguntas en sus cuadernos. Pueden usar tablas para hacer sus cálculos:

a) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde claro?

b) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde claro?

>>> A lo que llegamos

La cantidad de pintura amarilla y su costo son cantidades **directamente proporcionales**, pues al aumentar (al doble, al triple, etc…) o disminuir (a la mitad, a la tercera parte, etc…) la cantidad de pintura, su costo también aumenta (al doble, al triple, etc…) o disminuye (a la mitad, a la tercera parte, etc…).

Por ejemplo, si 100 ml de pintura amarilla cuestan $70, entonces 200 ml cuestan $140. Fíjate que la cantidad de pintura aumentó el doble, y por eso el costo también es el doble.

Lo mismo sucede con la pintura azul; la cantidad de pintura azul y su costo son **cantidades directamente proporcionales**.

Y ya hecha la mezcla, la cantidad de pintura verde claro y su costo también son **cantidades directamente proporcionales**.

V. Como no le alcanzaba el dinero, Manuel preguntó qué otro color con menor precio podía llevar. El vendedor le dijo que comprara verde oscuro, que era más barato porque lleva 300 ml de pintura azul y 200 ml de pintura amarilla. En sus cuadernos contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto cuestan 500 ml de pintura verde oscuro?

b) ¿Cuánto cuestan 800 ml de pintura verde oscuro?

c) ¿Cuánto cuestan 120 ml de pintura verde oscuro?

>>> A lo que llegamos

Al sumar los costos de las cantidades de pintura amarilla y azul necesarias para obtener pintura verde (clara u oscura), se obtiene el costo de la pintura verde. Este costo resulta ser directamente proporcional a la cantidad de pintura verde.

EL VALOR UNITARIO

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la secuencia 2 **El mundo en que vivimos** de su libro de **Geografía** ya estudiaron algunos de los usos de las escalas. En esta sesión continuarán estudiando los usos de las escalas.

Escalas y maquetas en arquitectura

La maqueta de un edificio es una reproducción más pequeña que conserva sus proporciones. Es decir, si a cada centímetro de la maqueta le corresponden 100 cm en el edificio, se dice que la escala de la maqueta es **1** a **100**, lo que significa "un centímetro en la maqueta son 100 cm en el edificio". En ese caso, todas las dimensiones de la maqueta son 100 veces menores a las del edificio: la medida de la altura es 100 veces más chica, la de la base es 100 veces más chica, la del ancho de las ventanas es 100 veces más chica.

Recuerden que:

100 centímetros (100 cm) equivalen a 1 metro (1 m).

Nueva Biblioteca Pública de México Vasconcelos, México, D.F.

>>> Consideremos lo siguiente

La figura 1 es el plano de una casa dibujado a una escala de **2.5** cm a **4** m (es decir, dos centímetros y medio del dibujo representan cuatro metros de la medida real de la casa).

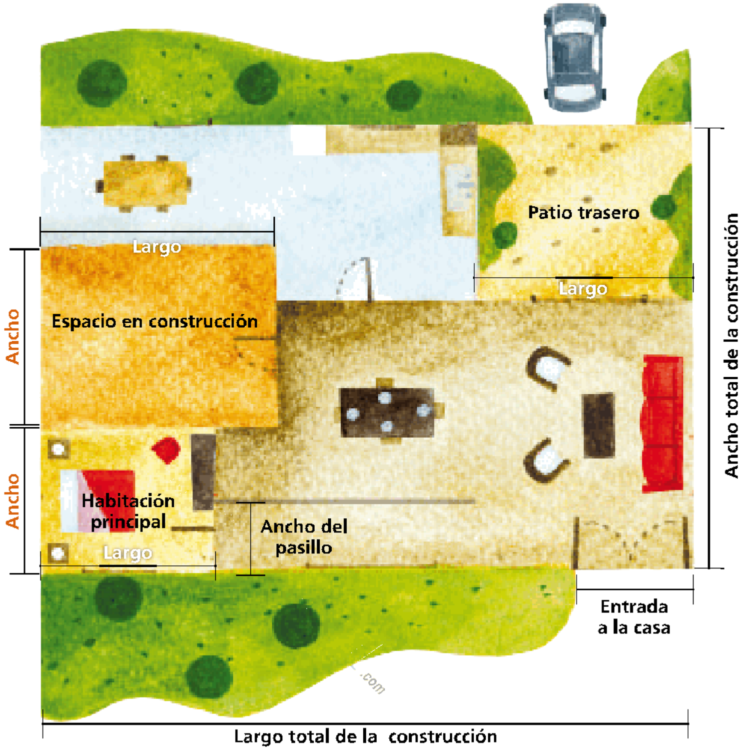


Figura 1

Completen la siguiente tabla para encontrar las medidas reales que tendrá la casa.

	Medida del plano (cm)	Medida real (cm)
Ancho de la habitación principal	2.5	400
Ancho del pasillo	1.25	
Ancho total de la construcción	7.5	
Largo del patio trasero	3.75	
Largo del terreno	11	
Largo del espacio en construcción	4	

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Cómo calcularon las medidas reales de la casa?

b) ¿Cómo calcularon el largo del terreno?

c) ¿Cuántas veces más grande es la medida real del largo del terreno que la medida del largo del terreno en la figura 1?

>>> A lo que llegamos

Una estrategia útil para encontrar datos faltantes en relaciones de proporcionalidad es determinar el valor unitario, es decir, hallar el dato equivalente a 1. Por ejemplo, en el problema del plano se sabe que 1 cm del dibujo equivale a 160 cm del tamaño real de la casa. En este problema, 160 cm es el valor unitario que permite pasar de cualquier medida en el dibujo a su medida real.

Usando el valor unitario verifiquen la tabla de la página anterior.

II. En la secuencia 9 **Cómo medir seres pequeñitos** de su libro de **Ciencias I** han estudiado algunos de los descubrimientos hechos con el uso de los microscopios.

Los microscopios se usan para poder observar cosas muy pequeñas, como células de plantas y animales, ya que amplifican las imágenes hasta hacerlas visibles. Hay microscopios que agrandan las imágenes 100 veces, 500 veces, 1 000 veces y ¡hasta 1 000 000 de veces!

Algunos microscopios permiten observar algunos de los microorganismos más pequeños que existen: los virus, que miden alrededor de 0.1 micrómetros.

El micrómetro es una unidad de longitud muy pequeña.

Micra es la abreviatura de micrómetro.

1 micra equivale a $\frac{1}{1000}$ de mm o a $\frac{1}{1000000}$ de m.

Resuelvan el siguiente problema:

Un microscopio amplifica la imagen de un virus de 0.2 micrómetros a 120 micrómetros.

a) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 0.4 micrómetros? _______________

b) ¿De qué tamaño se vería con ese microscopio la imagen de un virus de 1 micrómetro? _______________

Completen la siguiente tabla para calcular los tamaños reales de otros microorganismos.

Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
0.2	120
3	
4.5	
7	
8	

III. Comparen los resultados de sus tablas y comenten:

a) ¿Cuál es el **valor unitario** que permite pasar del tamaño real al tamaño que se ve en el microscopio? ______________________

b) ¿Cuántas veces más chico es el tamaño real de una célula que el tamaño de la célula vista en este microscopio? ______________________

>>> A lo que llegamos

La estrategia del **valor unitario** en una situación de cantidades directamente proporcionales es muy útil, ya que basta saber el valor que le corresponde a la unidad para determinar cualquier valor requerido.

Este dato es suficiente para encontrar los valores de las medidas observadas con el microscopio a partir de sus medidas reales.

Por ejemplo, se sabe que el microscopio aumenta 1 micrómetro de tamaño a 600 micrómetros de tamaño. Para encontrar la ampliación de una célula de 4.5 micrómetros de tamaño en el microscopio, basta multiplicar 4.5 micrómetros × 600.

SESIÓN 3

LA PROPORCIONALIDAD EN OTROS CONTEXTOS

>>> Lo que aprendimos

1. Una bolsa con 50 caramelos cuesta $25.00; Juan compró 14 caramelos, ¿cuánto pagó? ______________

Completa la siguiente tabla para encontrar la cantidad de dinero que pagó Juan por los 14 caramelos que compró:

Número de caramelos	Precio de los caramelos (pesos)
50	25
10	
5	
1	
14	

El número de caramelos y su precio son cantidades directamente proporcionales. ¿Cuál es el valor unitario que permite encontrar el precio a partir del número de caramelos?

2. Las compañías fabricantes de automóviles hacen pruebas de velocidad a sus autos para verificar sus motores, frenos y sistemas de suspensión. Entre otras cosas, deben verificar que las velocidades a las que pueden viajar se mantengan constantes durante recorridos largos. En esta actividad vas a calcular algunos recorridos a partir de las velocidades de los automóviles.

a) Viajando en carretera, un automóvil va a 120 kilómetros por hora en promedio. Completa la siguiente tabla para encontrar las distancias recorridas en distintos tiempos de viaje.

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
1	120
2	
$3\frac{1}{2}$	
$4\frac{1}{5}$	
$5\frac{1}{3}$	
6	

En la sesión 1 de esta secuencia puedes revisar cuándo dos cantidades son directamente proporcionales.

b) A continuación hay dos tablas que corresponden a los resultados de las pruebas de velocidad de dos autos distintos. Uno de ellos fue siempre a la misma velocidad, el otro no.

AUTOMÓVIL 1

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
2.5	200
4	320
6.75	540
8	640
9.25	740

AUTOMÓVIL 2

Tiempo de viaje (horas)	Kilómetros recorridos
1.5	75
3	150
4.5	225
9	450
12	610

a) ¿En cuál de las dos tablas el número de kilómetros es directamente proporcional al tiempo de viaje? ____________________

b) ¿Cuál de los dos automóviles fue siempre a la misma velocidad? ____________________

>>> A lo que llegamos

Cuando un automóvil va siempre a la misma velocidad (velocidad constante), entonces la distancia recorrida por el automóvil y el tiempo que tarda en recorrerla son cantidades directamente proporcionales.

3. La competencia de las ranas.

Tres ranas compitieron en una carrera de saltos. Una rana es verde, otra roja y otra azul.

Las ranas saltaron en una pista de 20 m de longitud, los saltos que dio cada rana fueron siempre iguales.

Las siguientes tablas indican algunos de los lugares donde cayeron las ranas al saltar:

RANA VERDE	
Número de saltos	Distancia (rayitas)
2	4
4	8

RANA ROJA	
Número de saltos	Distancia (rayitas)
1	3
2	6

RANA AZUL	
Número de saltos	Distancia (rayitas)
6	3
10	5

Comenten:

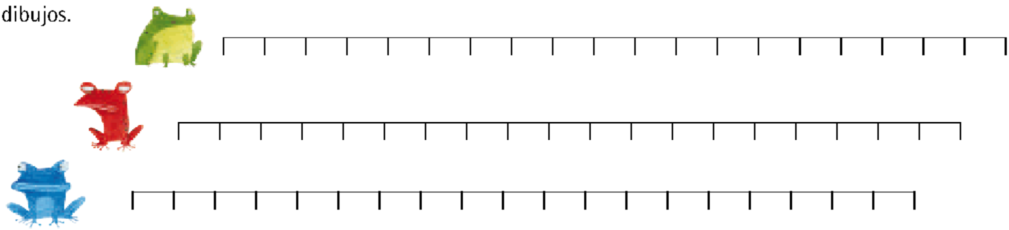
a) ¿Cual de las tres ranas ganó la competencia? ____________________

b) ¿Cuántos saltos dio la rana que ganó la competencia? ____________________

c) ¿Cuál fue la longitud del salto de cada rana? Anótenlo en las siguientes líneas:

Rana verde ______________ Rana roja ______________ Rana azul ______________

Si es necesario, verifiquen sus respuestas haciendo saltar a las ranas en los siguientes dibujos.



4. La luz solar tarda aproximadamente 8 minutos en llegar a la Tierra. Esto se debe a que la Tierra está a 150 millones de kilómetros del Sol.

No olvides que la luz viaja siempre a la misma velocidad, es decir, cada 8 minutos recorre 150 millones de kilómetros.

Completa la siguiente tabla:

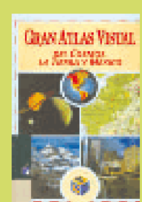
Planeta	Distancia al Sol (millones de kilómetros)	Tiempo que tarda en llegar la luz (minutos)
Marte		12
Mercurio	60	
Venus	108	
Tierra	150	8
Saturno	1 425	
Neptuno	4 500	

>>> A lo que llegamos

La distancia que recorre la luz y el tiempo que tarda en hacerlo son cantidades directamente proporcionales.

>>> Para saber más

Sobre el Sistema Solar consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
"El Sistema Solar", en *Gran atlas visual del Cosmos, la Tierra y México*. México: SEP/Ediciones Euroméxico, Libros del Rincón, 1999.



Sobre los colores primarios y sus mezclas consulta:
http://www.xtec.es/~aromero8/acuarelas/color.htm
http://www.xtec.es/~aromero8/acuarelas/index.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre los planetas, el Sol y la velocidad de la luz consulta:
http://www.xtec.es/~rmolins1/solar/es/planetes.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Reparto proporcional

En esta secuencia elaborarás y utilizarás procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

SESIÓN 1

LA KERMÉS

>>> Para empezar

La kermés es una verbena popular tradicional en nuestro país. Casi siempre se lleva a cabo en el atrio de una iglesia o en el patio de una escuela. Es muy divertida porque puedes disfrutar de juegos y platillos típicos de la cocina mexicana.

>>> Consideremos lo siguiente

En una escuela se llevó a cabo una kermés. Entre tres amigos pusieron un puesto de enchiladas y juntaron sus ahorros para comprar los ingredientes. El primero puso \$25, el segundo \$50 y el tercero \$100.

Al final del día obtuvieron una ganancia de \$1 050 por la venta y decidieron repartirlo de manera proporcional a lo que aportó cada quién para comprar los ingredientes.

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto le debe tocar al primer amigo? ______

b) ¿Cuánto le debe tocar al segundo amigo? ______

c) ¿Cuánto le debe tocar al tercer amigo? ______

>>> Manos a la obra

I. El primer amigo propuso dividir la ganancia total ($1 050) entre 3, de modo que a cada uno le tocarían $350.

El tercer amigo no está de acuerdo con la forma de repartir el dinero propuesta por el primer amigo.

Comenten:

a) ¿Por qué creen que el tercer amigo está en desacuerdo?

b) El tercer amigo puso cuatro veces la cantidad de dinero que puso el primero. Del dinero que van a repartir, ¿cuántas veces más le debe tocar al tercer amigo respecto del primero? ______

c) El segundo amigo puso el doble de dinero que el primero. Del dinero que van a repartir, ¿cuántas veces más le debe tocar al segundo amigo respecto del primero?

______

II. Contesten:

¿Cuánto dinero juntaron entre todos? ______

Completen la siguiente tabla para encontrar cuánto dinero le toca a cada uno de los amigos:

	Cantidad de dinero invertido (pesos)	**Dinero obtenido en la venta (pesos)**
Total	175	1 050
Primer amigo	25	
Segundo amigo	50	
Tercer amigo	100	

>>> A lo que llegamos

Una forma de resolver los problemas de reparto proporcional consiste en determinar la cantidad total y las partes en las que se va a llevar a cabo dicho reparto. Por ejemplo, en el problema de la kermés, la cantidad a repartirse es el dinero total recaudado y se reparte proporcionalmente entre las distintas partes que cada quién aportó. Las cantidades que están en proporción son la cantidad de dinero aportado y la cantidad de dinero obtenido respecto a lo aportado.

III. Tres campesinos sembraron un terreno de 20 hectáreas (20 ha). El primero sembró 1 ha, el segundo 8 ha y el tercero 11 ha. Cuando terminaron de sembrarlo les pagaron en total $2 400.

Completen la siguiente tabla para calcular cuánto dinero le toca a cada campesino si se reparten proporcionalmente el total del dinero pagado entre el número de hectáreas que cada quien sembró:

Número de hectáreas sembradas	Cantidad pagada por el número de hectáreas sembradas (pesos)
20	2 400
1	
8	
11	

>>> Lo que aprendimos

Tres albañiles levantaron una barda de 30 m^2. El primer albañil levantó 10 m^2, el segundo albañil levantó 5 m^2 y el tercero levantó 15 m^2. Por el total del trabajo les pagaron $600.

Si se reparten el dinero proporcionalmente al número de metros cuadrados que cada quién levantó, ¿cuánto dinero le tocaría a cada uno de los albañiles?

Reparto proporcional

Luis y Juan son albañiles, acaban de construir una pared rectangular de 50 m^2, Luis construyó 35 m^2 y Juan 15 m^2. ¿Te parece justo que se repartan por partes iguales?, ¿por qué? Este tipo de problemas se llaman de reparto proporcional.

SESIÓN 2

MÁS SOBRE REPARTO PROPORCIONAL

>>> Para empezar

Los contextos en los cuales surgen las situaciones de reparto proporcional son muy variados. En esta sesión estudiarás tres situaciones más en las cuales aparece el reparto proporcional.

>>> Consideremos lo siguiente

Pedro y Édgar invirtieron sus ahorros en un negocio. Pedro puso $2 200 y Édgar puso $2 800. Al finalizar el negocio obtuvieron una ganancia de $100 000.

Si se reparten proporcionalmente el dinero que ganaron:

a) ¿Cuánto le tocaría a Pedro? ____________________

b) ¿Cuánto le tocaría a Édgar? ____________________

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar cuánto dinero le corresponde a Pedro y cuánto a Édgar.

Cantidad de dinero invertido (pesos)	Ganancia correspondiente a la inversión (pesos)
5 000	100 000
500	
50	
5	
1	
2 200	
2 800	

II. Comparen los resultados de la tabla anterior con los que ustedes obtuvieron y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la ganancia por cada peso invertido? ____________________

b) Si Pedro hubiera invertido $3 500, ¿cuánto dinero hubiera recibido de ganancias?

____

>>> A lo que llegamos

Otra de las formas de resolver los problemas de **reparto proporcional** consiste en encontrar el valor unitario, que permite pasar de la cantidad invertida a la ganancia correspondiente. Por ejemplo, en el problema del negocio entre Pedro y Édgar la inversión total fue de $5 000 y la ganancia total de $100 000, así que el valor unitario que permite saber cuánto ganaron por cada peso que invirtieron es $20, es decir, por cada peso que invirtieron ganaron $20.

Salem y el reparto de pan [1]

III. Resuelvan el siguiente problema.

Dos viajeros se encontraron en el camino a un hombre que había sido asaltado. Este hombre se llamaba Salem Nasair, quien les dijo:

– ¿Traéis algo de comer?, me estoy muriendo de hambre.

– Me quedan tres panes –respondió uno de los viajeros.

– Yo llevo cinco –dijo el otro viajero.

– Pues bien, dijo Salem, yo os ruego que juntemos esos panes y nos los repartamos en partes iguales. Cuando llegue a mi hogar prometo pagar con ocho monedas de oro el pan que coma.

Cuando llegaron, Salem Nasair recompensó a los viajeros como había prometido. Le dio tres monedas de oro al que llevaba tres panes y cinco monedas de oro al que llevaba cinco panes. Sin embargo uno de los viajeros dijo:

– ¡Perdón, Salem!, la repartición, hecha de este modo, puede parecer justa, pero no es un reparto proporcional.

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿A cuál de los viajeros creen que no le pareció justo el reparto? ____________________

b) ¿Por qué? ____

IV. En otra telesecundaria, un equipo que resolvió la actividad de los viajeros comentó:

"Salem dio ocho monedas por el pan compartido, entonces sí es justo porque al que puso cinco panes le dio cinco monedas de oro y al que puso tres panes le dio tres monedas de oro"

Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad de pan comió cada uno de los viajeros?

____

b) ¿Cuánto pan dio a Salem el viajero que traía tres panes?

____

c) ¿Cuánto pan dio a Salem el viajero que traía cinco panes?

____

d) ¿Cómo hubieran repartido ustedes el dinero entre los viajeros para que fuera un reparto proporcional? ____

Comparen sus respuestas y comenten los procedimientos que usaron para encontrarlas.

1 Malba, Tahan (2005). *El hombre que calculaba.* México: SEP/Editorial Limusa. Libros del Rincón. pp. 23, 24 y 25.

>>> Lo que aprendimos

Nuestro país tiene una población aproximada de 110 000 000 de personas y el territorio nacional es de 2 000 000 de km^2. Sin embargo, la población no está repartida proporcionalmente en el territorio. Hay estados cuyo territorio comprende muy pocos kilómetros cuadrados y, sin embargo, tienen muchísimos habitantes: ¡En el Distrito Federal hay casi 9 000 000 de personas viviendo en un territorio de 1 500 kilómetros cuadrados!

Y otros estados tienen grandes extensiones de tierra y muy pocos habitantes viviendo en ella: Nuevo León, por ejemplo, tiene 3 800 000 mil habitantes viviendo en 64 000 kilómetros cuadrados.

La siguiente tabla muestra la extensión territorial y el número de habitantes de algunos de los estados de la República Mexicana.

Entidad federativa	Extensión (km^2)	Número de habitantes
Tlaxcala	2 000	960 000
Querétaro	12 000	1 400 000
Distrito Federal	1 500	8 700 000
Nuevo León	64 000	3 800 000

Los datos se aproximaron para simplificar los cálculos. Tomado de *XII Censo General de Población y Vivienda* 2000 disponible en: http://www.inegi.gob.mx (consulta: 23 mayo 2006).

Contesta en tu cuaderno:

a) ¿Cuál es el total de habitantes que hay entre los cuatro estados?

b) ¿Cuántos kilómetros cuadrados hay en total juntando los cuatro estados?

c) ¿Cómo repartirías proporcionalmente la población entre los territorios de estos estados?

Número de habitantes que habría en Tlaxcala ______________________________

Número de habitantes que habría en Querétaro ______________________________

Número de habitantes que habría en el Distrito Federal ______________________________

Número de habitantes que habría en Nuevo León ______________________________

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: SEP/Editorial Limusa, Libros del Rincón, 2005.

Sobre la densidad de población en México consulta: http://www.inegi.gob.mx/inegi/default.asp [Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Ruta: Información estadística → Estadísticas por tema → Estadísticas sociodemográficas → Dinámica de la población → Volumen, estructura, crecimiento y distribución → Densidad de población por entidad federativa, 2000.
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Problemas de conteo

En esta secuencia resolverás problemas de conteo utilizando diversos recursos y estrategias, como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos de enumeración.

SESIÓN 1

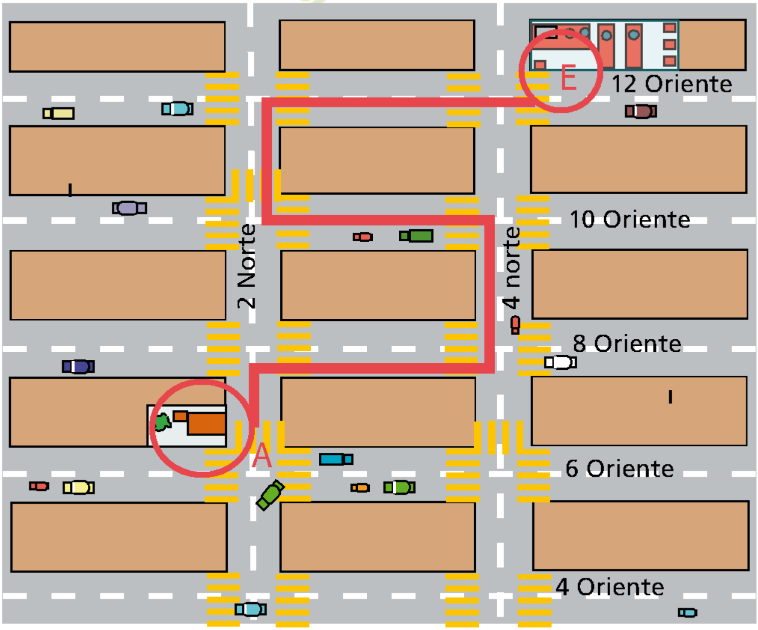
¿CUÁNTOS CAMINOS HAY?

>>> Para empezar

Hay situaciones que pueden resolverse de distintas formas; por ejemplo, piensa en los recorridos que puede hacer un repartidor de mercancías en el centro de la ciudad de Puebla. ¿Cuántos caminos distintos puede tomar para ir de un lugar a otro?, ¿habrá uno más corto que los demás?, ¿cuál conviene tomar?

Problemas como éstos son los que se plantearán en las siguientes sesiones.

- Ana vive en el centro de la ciudad de Puebla, en la esquina que forman las calles 2 Norte y 6 Oriente. Ella va a la escuela que está ubicada en 4 Norte y 12 Oriente. El mapa muestra el recorrido que ayer hizo Ana para ir de su casa a la escuela.



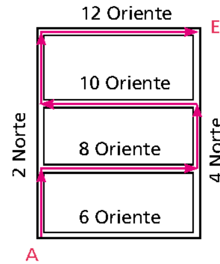
Realicen las siguientes actividades

a) En el mapa de su libro, cada quién marque con color verde otro recorrido que podría hacer Ana para ir de su casa a la escuela.

b) En este recorrido, ¿cuáles son las calles por las que pasa Ana para llegar a la escuela? ______________________________

c) Marca en tu mapa con color azul el recorrido que trazó tu compañero. ¿Por cuáles calles pasa este nuevo recorrido? ______________________________

MAPA 1



>>> Consideremos lo siguiente

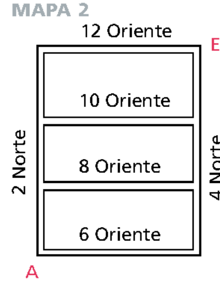
Como ven, casi todas las calles del centro de la ciudad de Puebla son rectas, por lo que es posible representar el recorrido que hizo Ana de su casa (A) a la Escuela (E), como muestra el **mapa 1**.

a) Encuentren en el **mapa 2** un recorrido en el que Ana camine el menor número de cuadras para llegar a la escuela (E) y represéntenlo aquí.

b) ¿Cuántas cuadras tiene ese recorrido? ______________________________

c) ¿Cuántas formas diferentes hay de caminar ese recorrido? ______________________________

MAPA 2

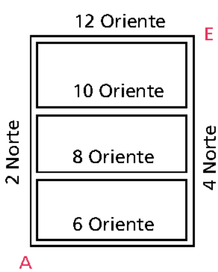


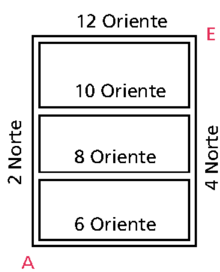
Comparen su solución con las de los otros equipos.

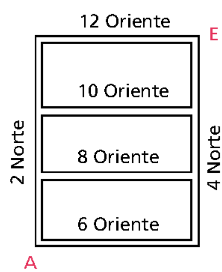
a) ¿Cuántas formas diferentes tiene Ana de caminar el menor número de cuadras?

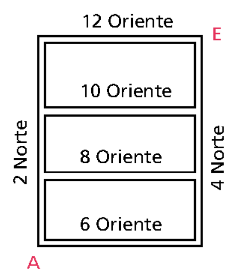
____

b) Marquen esos recorridos en los siguientes mapas:









>>> Manos a la obra

I. Una pareja de alumnos representó el recorrido que siguió Ana mediante flechas: ↑ → ↑ ↑

Otra pareja lo representó así: **N,O,N,N** utilizando las letras **O** de calle **O**riente y **N** de calle **N**orte.

a) ¿Puede llegar Ana a la escuela siguiendo el camino **O,O,N,N**? ______________________________

b) ¿Y siguiendo el camino → ↑ ↑ → ? ______________________________

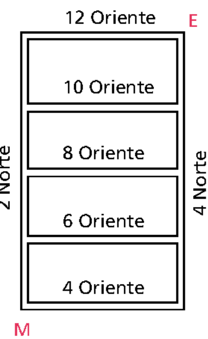
c) Discute con tu compañero si Ana puede o no realizar el recorrido.

d) Utilizando las letras N y O, representen en su cuaderno los recorridos que puede hacer Ana para ir de su casa a la escuela caminando el menor número de cuadras.

Los recorridos que constan del menor número de cuadras que se puede caminar son aquellos en los que no hay regresos. A estos recorridos se les llamará recorridos más cortos.

II. Consideren el **mapa 3**; María (M) es compañera de Ana y vive en la esquina de 4 Oriente y 2 Norte.

MAPA 3



a) ¿Cuál es el menor número de cuadras que debe caminar María para ir de su casa a la escuela?

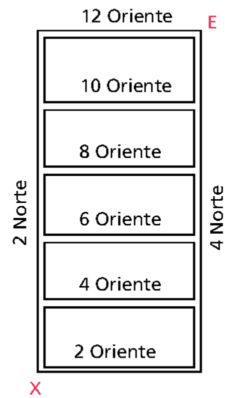
____

b) ¿De cuántas formas diferentes puede ir de su casa a la escuela caminando el menor número de cuadras? Utiliza el código de las letras N y O para representar, en tu cuaderno, los recorridos más cortos que puede hacer María.

III. Consideren el **mapa 4**, ¿de cuántas formas diferentes puede llegar alguien a la escuela si vive en la esquina de 2 Oriente y 2 Norte, caminando el menor número de cuadras?

____

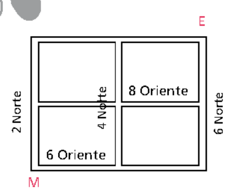
MAPA 4



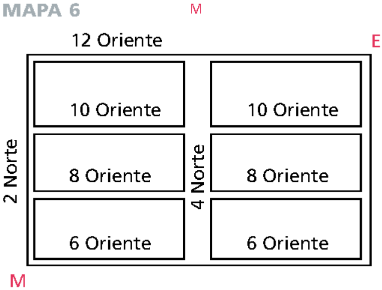
>>> Lo que aprendimos

Encuentra en el **mapa 5** los diferentes recorridos que puede seguir alguien para ir del punto M a la escuela (E), caminando el menor número de cuadras. Represéntalos en tu cuaderno utilizando las letras N y O.

MAPA 5



MAPA 6



a) ¿Cuántas cuadras tiene el recorrido más corto?

____

b) ¿De cuántas formas diferentes puedes caminarlo para llegar a la escuela? _______________

c) En el **mapa 6**, ¿cuántas cuadras forman al recorrido más corto que se puede seguir para ir de M a E?

____

d) ¿De cuántas formas diferentes lo puedes realizar? _______

¿Se puede realizar el siguiente recorrido N, N, O, O, N, N?

____

>>> A lo que llegamos

Al encontrar cuántas formas diferentes hay de realizar un recorrido, se está resolviendo un problema de conteo. En los problemas de conteo es conveniente utilizar una manera de distinguir un resultado de otro.

Por ejemplo, en el caso de Ana se puede diferenciar un camino de otro si cada uno de ellos se distingue con un símbolo, una letra o un nombre. Dos maneras de representar uno de los cuatro recorridos que Ana puede hacer son: N,N,O,N y $\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.

Estas maneras de resolver problemas de conteo se llaman procedimiento de enumeración.

¿DE CUÁNTAS FORMAS?

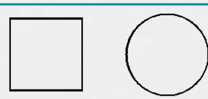
SESIÓN 2

>>> Para empezar

Existen situaciones en las que se debe elegir un producto o servicio entre varios que se ofrecen. Por ejemplo, en la compra de zapatos se pueden elegir diferentes modelos y colores; lo mismo sucede al comprar ropa, autos o cualquier otro artículo.

>>> Consideremos lo siguiente

En la pastelería "La gran rebanada" elaboran pasteles de diferentes sabores, formas y decorados. Cuando alguien hace un pedido, el vendedor debe llenar un formato como el siguiente:

La gran rebanada Pastelería	
Nombre del cliente:	Num. de pedido: Precio: Anticipo:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega: Hora:
Instrucciones: en cada caso, marcar con "X" la opción deseada	
Formas	
	
Sabores	
□ Chocolate □ Tres leches □ Vainilla	
Decorado	
□ Cereza □ Nuez □ Fresa	

a) ¿Cuántos pasteles diferentes pueden elaborar en esa pastelería? ______________

b) ¿Habrá más de 10 pasteles diferentes? ______________ ¿Más de 20? ______________

¿Más de 40? ______________

Comparen sus respuestas

>>> Manos a la obra

I. Completen las siguientes tablas.

Pastel circular	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)	Ch-c		
Tres leches (T)		T-f	
Vainilla (V)			

Pastel cuadrado	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)			
Tres leches (T)			
Vainilla (V)		V-f	

a) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel de forma circular hay con sabor chocolate?

____

b) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de nuez y sabor vainilla hay?

____

c) ¿Cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de fresa hay?

____

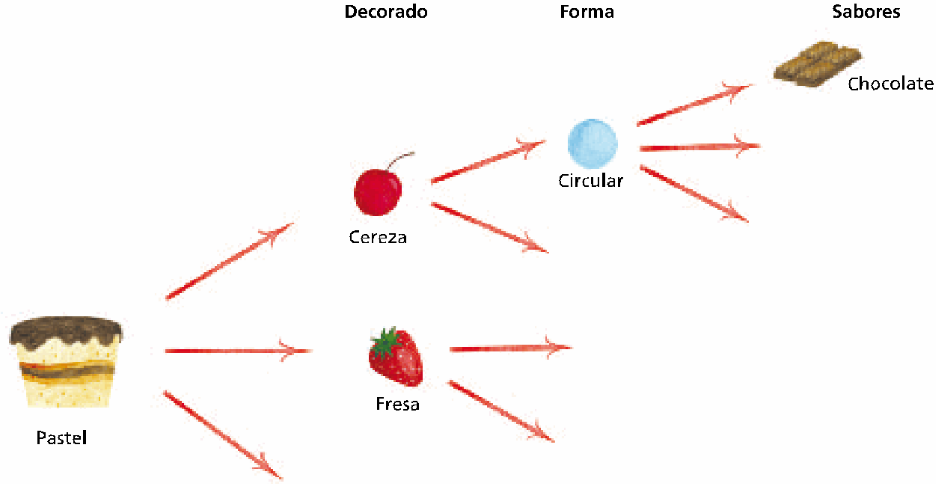
d) Observen las tablas. En la primera casilla de cada tabla está identificada la forma del pastel, de la segunda columna en adelante están los decorados y del segundo renglón hacia abajo, los sabores. Si en vez de construir las tablas a partir de la forma del pastel se construyen a partir de los diferentes sabores, ¿cuántas tablas tendrían que hacerse? __________ Elabórenlas en su cuaderno.

e) ¿Cambia el número total de variedades de pastel? ______________ ¿Por qué?

____

____

II. Completen el siguiente diagrama de árbol:



a) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con sabor de tres leches? ______

b) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con decorado de cereza? ______

c) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar con forma cuadrada? ______

d) ¿Cuántos pasteles diferentes se pueden elaborar? ______

e) ¿Obtuvieron el mismo número de pasteles diferentes con las tablas y con el diagrama de árbol? ______

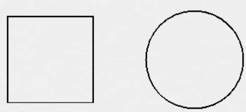
f) El diagrama de árbol anterior tiene tres niveles, uno por cada uno de los conjuntos que definen las características del pastel. ¿Cuál de las tres características del pastel se utiliza en el primer nivel del árbol? ______

>>> A lo que llegamos

Un **diagrama de árbol** es un recurso que permite visualizar y enumerar todos los resultados de un problema de conteo. Los diagramas de árbol están compuestos por niveles y ramas. En el ejemplo de la pastelería hay tres características: el decorado, la forma y el sabor, por lo tanto, el diagrama de árbol tiene tres niveles. El número de ramas de cada nivel se determina por la cantidad de elementos de cada característica. Por ejemplo, en el nivel de "forma" hay dos ramas, una para el pastel cuadrado y otra para el pastel circular.

g) Supongan que en esa pastelería tienen un nuevo decorado: el de frutas. ¿Cuántos pasteles distintos podrían elaborarse ahora? ________________ . En su cuaderno, elaboren el diagrama de árbol que representa esta situación.

III. La pastelería puede rellenar los pasteles con dos ingredientes: durazno o almendras. Ahora los ha incluido en el formato de pedidos.

La gran rebanada **Pastelería**	
Nombre del cliente:	Num. de pedido: Precio: Anticipo:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega: Hora:
Instrucciones: en cada caso, marcar con "X" la opción deseada	
Formas	**Sabores**
	☐ Chocolate ☐ Tres leches ☐ Vainilla
Relleno	**Decorado**
☐ Durazno ☐ Almendras	☐ Cereza ☐ Nuez ☐ Fresa

a) ¿Cuántos pasteles distintos pueden elaborarse ahora en la pastelería? ____________

b) ¿Qué recurso les pareció más conveniente utilizar para resolver el problema, el diagrama de árbol o las tablas? Utilícenlo para resolver este problema en su cuaderno.

>>> A lo que llegamos

Las **tablas** y los **diagramas de árbol** son dos recursos para encontrar de manera sistemática todos los resultados posibles en un problema de conteo. En ambos casos se ha hecho uso de códigos para enumerar los diferentes resultados.

Cuando se realiza un conteo de modo sistemático, el resultado será siempre el mismo, no importa el recurso que se utilice.

>>> Lo que aprendimos

En la secuencia 31 **¿Cómo se heredan las características de un organismo?** de tu libro **Ciencias I**, estudiarás que en los caracteres que los seres vivos heredan hay algunos que son dominantes y otros recesivos. Por ejemplo, en tu familia, ¿cuál color de ojos es un carácter dominante?, ¿cuál color de ojos es un carácter recesivo?

Supon que en cierta planta las flores de color rojo es un carácter dominante y las de color azul es recesivo. Identifica el color rojo con **RR** (dos letras porque la información de la herencia biológica se transmite en pares) y el azul con **aa**.

Si en la primera generación se cruzan una con flores rojas y otra con flores azules, tendrás la siguiente tabla:

Planta RR	Planta aa	
	a	a
R	Ra	Ra
R	Ra	Ra

Las flores que nacen, todas son rojas porque **Ra** significa que la flor es roja, pero lleva información de la flor azul (aunque no se manifieste). La única manera de que la flor sea azul, por ser recesiva, es cuando ambas letras sean **aa**.

Si se toman dos de los cuatro descendientes y se cruzan, ¿de qué color serán las flores? Averígualo completando la siguiente tabla:

Planta Ra	Planta Ra	
	R	a
R		
a		

a) ¿Cuántas flores son rojas? (recuerda que son las que por lo menos tienen una letra **R**) _______________

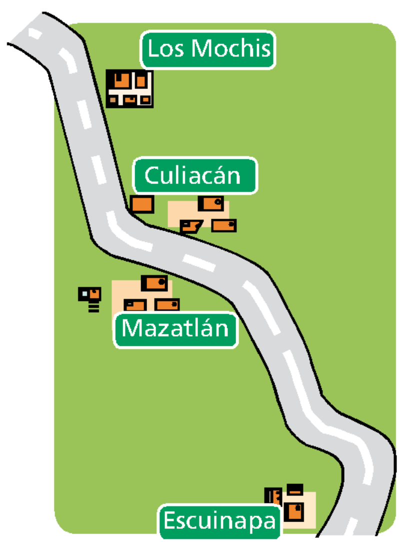
b) ¿Cuántas flores son azules (**aa**)? _______________

¿CUÁNTOS VIAJES HAY…?

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En esta sesión vas a seguir estudiando estrategias de conteo, ahora considerando los distintos viajes que una línea de autobuses ofrece.



>>> Consideremos lo siguiente

Una línea de autobuses cubre las principales ciudades del estado de Sinaloa: Los Mochis, Escuinapa, Culiacán y Mazatlán. La línea de autobuses sólo ofrece viajes directos, es decir, no hace paradas intermedias (si va de Los Mochis a Mazatlán, no hace parada en Culiacán). ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses?

Comparen sus respuestas

>>> Manos a la obra

I. Realicen lo que se les pide.

a) Completen la tabla de la izquierda.

b) Si una persona sale de Culiacán viajando en esta línea de autobuses, ¿a cuántos destinos diferentes puede llegar? ________________

c) Si una persona llega a Mazatlán, ¿de cuántas ciudades diferentes pudo haber salido? ________________

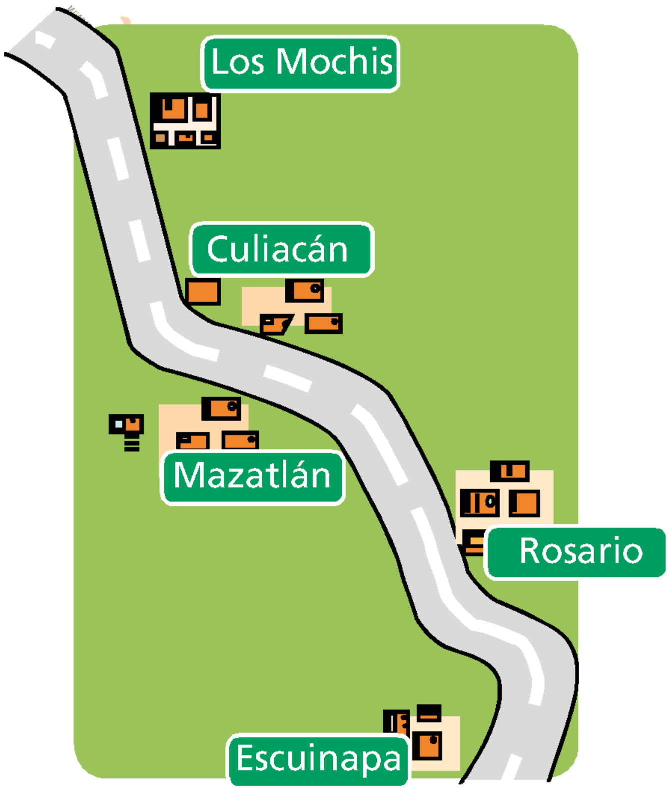
d) En total, ¿cuántos viajes diferentes hay? ________________

II. La línea de autobuses ha decidido dar servicio a la ciudad de Rosario.

a) ¿Cuántos viajes diferentes ofrece ahora la línea de autobuses?

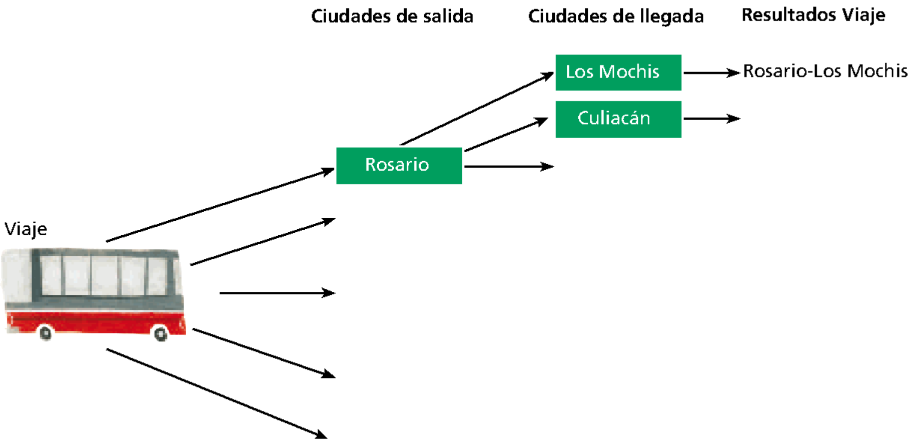
____

Ciudad de salida	Ciudad de llegada



Un equipo empezó a resolver el problema mediante el siguiente diagrama de árbol.

b) Complétenlo en su cuaderno.



a) ¿Cuántos niveles tiene el diagrama de árbol? ______

b) ¿A qué corresponde cada nivel? ______

c) ¿Cuántas ramas tiene el primer nivel? ______

d) ¿A qué corresponde cada rama? ______

e) ¿Cuántas ramas tiene el segundo nivel? ______

f) ¿A qué corresponde cada rama? ______

g) Consideren una ciudad como punto de salida, ¿cuántas opciones diferentes de viaje hay? ______

h) Si hay 5 ciudades como punto de salida, ¿cuántas opciones diferentes de viaje hay?

______

i) ¿Qué relación encuentran entre el número de ciudades de salida, el número de ciudades de llegada y el total de viajes que se pueden realizar?

______

Recuerden que:
Un diagrama de árbol está compuesto por niveles y ramas.

>>> A lo que llegamos

Para determinar el número total de viajes que la línea ofrece se puede multiplicar el número de ciudades de salida por el número de ciudades de llegada. Por ejemplo, si hay cuatro ciudades de salida y tres ciudades de llegada el número total de viajes es $4 \times 3 = 12$.

III. Contesten las siguientes preguntas.

a) Ahora la línea da servicio a las seis principales ciudades de Sinaloa. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses? ______

b) La línea de autobuses ahora da servicio a diez ciudades. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece? ______

c) Otra línea de autobuses ofrece como destinos las capitales de las 32 entidades federativas del país. ¿Cuántos viajes diferentes ofrece esta línea? ______

______

>>> A lo que llegamos

Los diagramas de árbol y las tablas son recursos que ayudan a encontrar todas y cada una de las opciones existentes en un problema de conteo.

En ocasiones, la multiplicación es la operación que permite encontrar el número total de opciones existentes.

>>> Lo que aprendimos

Mi amigo Juan me planteó un acertijo. Me dijo que el número de su casa tiene dos cifras, que ninguna de las dos es 0 y que son diferentes entre sí.

Número de la casa:	1ra. cifra	2da. cifra

a) ¿Qué números puedo utilizar como primera cifra? ______

¿Cuántos son en total? ______

b) Si la primera cifra fuera 2, ¿qué números podría utilizar como segunda cifra? ______ ¿Cuántos son en total? ______

c) Entonces, ¿cuántos números de dos cifras pueden ser el número de la casa de Juan? ______ ¿cuántos pares de números existen en total que cumplen con las condiciones del problema? ______

¿Saben cuántos hay?

La vida diaria exige moverse de un lugar para otro, y en el caso de la ciudad de México no solamente cuentan las distancias sino también el tiempo de traslado, por eso hay que buscar las rutas que más nos convengan entre varias posibilidades.

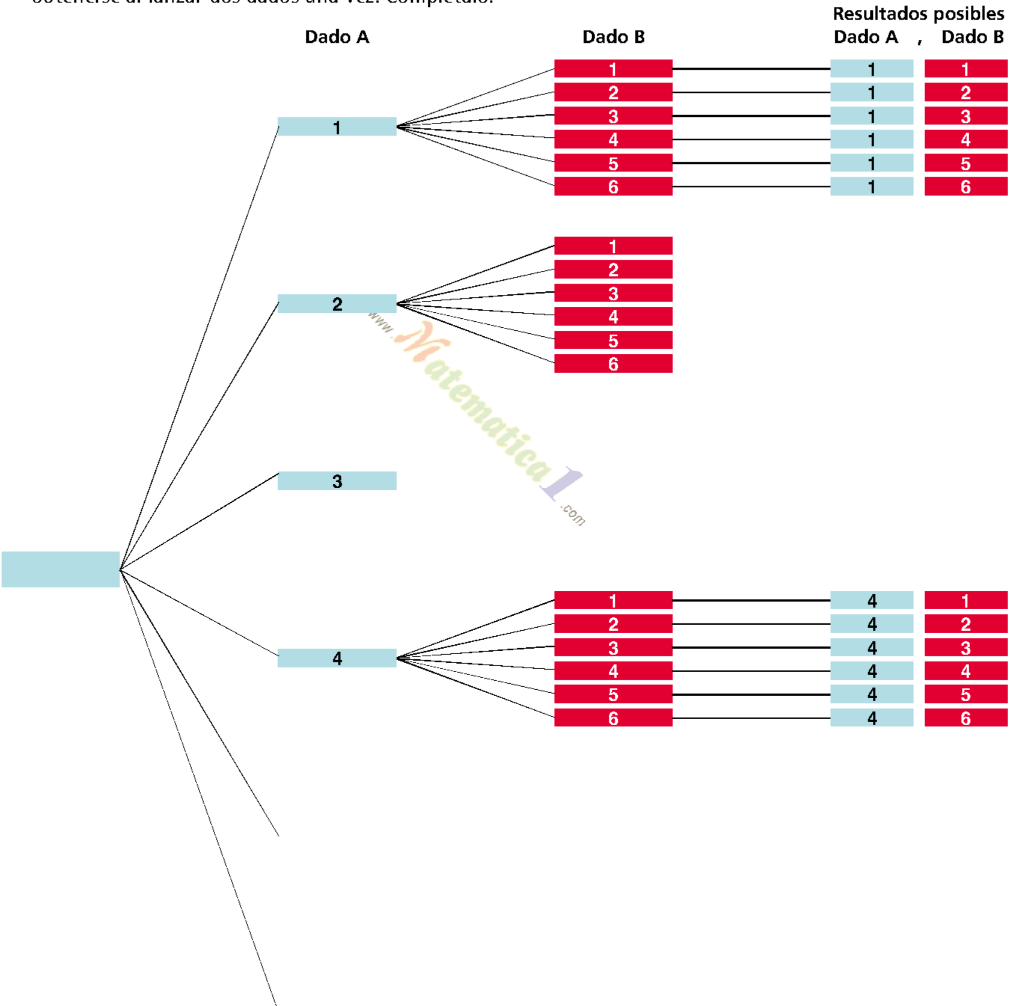
Pero también hay gente que se traslada a diferentes minicipios dentro de un estado. En el video se pueden observar ambas situaciones.

>>> Para empezar

En esta sesión interpretarás diagramas de árbol y definirás las condiciones que cumplen ciertos resultados en problemas de conteo.

>>> Lo que aprendimos

1. El siguiente diagrama de árbol muestra algunos de los resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar dos dados una vez. Complétalo.



Contesta las siguientes preguntas:

a) El resultado (2,1) significa que en el lanzamiento cayó 2 en el dado A, ¿qué cayó en el dado B? ______________________

b) ¿Qué significa el resultado (1,2)? ______________________

c) ¿Y el resultado (6,6)? ______________________

d) ¿Cuántos resultados diferentes en total puede haber al lanzar dos dados?

____

De esos resultados, ¿en cuántos se cumplen las siguientes condiciones?:

a) "En los dos dados cae el mismo número" ______________________

b) "En el dado A cae un número mayor que en el dado B" ______________________

c) "En el dado A cae un número par" ______________________

Comparen sus respuestas y contesten lo que se les pide:

a) ¿Cuántos resultados hay en los que en ambos dados caen números impares?

____

b) ¿Y cuántos resultados hay en los que ambos dados caen números pares?

____

2. Ahora van a sumar los números que pueden caer en ambos dados, por ejemplo:

Dado A: 4 y dado B: 5

La suma es 4 + 5 = 9

Utilicen el diagrama de árbol para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la menor suma que puede obtenerse? ______________________

b) ¿Cuántas formas hay de obtenerla? ______________________

c) ¿Cuál es la mayor suma que puede obtenerse? ______________________

d) ¿Cuántas formas hay de obtenerla? ______________________

e) ¿Cuál es la suma que más veces aparece? ______________________

f) ¿Cuántos resultados hay en que la suma es menor de 7? ______________________

g) ¿Cuántos resultados hay en que la suma es mayor de 7? ______________________

3. Del diagrama de árbol se ha tomado el siguiente conjunto de resultados.

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6).

¿Qué característica tienen en común estos resultados? ____________________

¿Qué característica tienen los siguientes conjuntos de resultados?

a) (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3) ____________________

b) (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5),(6,6) ____________________

c) (1,3), (2,2), (3,1) ____________________

d) (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) ____________________

4. Las claves de larga distancia constan de tres dígitos. Supongan que el primero debe elegirse de los números del 2 al 5. El segundo tiene que ser 0 o 1. El tercero tiene que ser mayor que 5.

a) ¿Cuántas claves distintas se pueden formar? ____________________

b) Elaboren tablas de doble entrada para representar los resultados. ¿Cuántas claves de larga distancia inician con 20? ____________________

c) ¿Cuántas claves de larga distancia terminan con 9? ____________________

d) ¿Cuántas claves de larga distancia tienen el mismo número en los 3 dígitos?

____

>>> Para saber más

Sobre otros ejemplos de problemas de conteo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Nozaki, Akiro. *Trucos con sombreros*. México: SEP/FCE, Libros del Rincón, 2005.

Anno, Mitsumasa. *El jarrón mágico. Una aventura matemática*. México: SEP/Editorial Juventud, Libros del Rincón, 2005.

Problemas aditivos de números fraccionarios y decimales

En esta secuencia resolverás problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos

SESIÓN 1

EL FESTIVAL DE FIN DE CURSOS

>>> Para empezar

¿Dónde se utilizan las fracciones?

En ocasiones las medidas de los materiales que se utilizan en la carpintería están expresados en fracciones. Por ejemplo, el grosor de las tablas y de las brocas y la longitud de los clavos se miden en pulgadas y fracciones de pulgada.

>>> Consideremos lo siguiente

En una telesecundaria se va a realizar el festival de fin de cursos y requieren construir un templete con una base de madera que tenga un grosor de una pulgada. La escuela sólo cuenta con dos piezas de madera, una de media pulgada y otra de un tercio de pulgada.

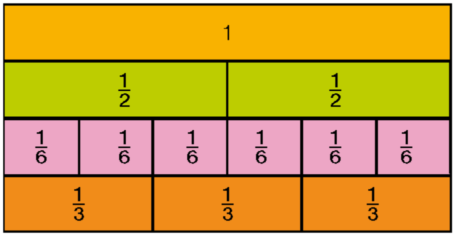
Si se empalman estas dos piezas, ¿su grosor será suficiente? ______________________

¿Cuánto faltaría o sobraría? ______________________

Compare sus respuestas

>>> Manos a la obra

I. Utilicen el diagrama para encontrar la suma de media pulgada más un tercio de pulgada.



a) Al empalmar las tablas, ¿cuál es su grosor? ______________________________

b) ¿Cuánto falta para alcanzar el grosor de la base del templete que se requiere construir? ______________________________

II. Contesten en sus cuadernos:

a) Si las medidas del grosor de las tablas de madera fueran $\frac{3}{4}$ de pulgada y $\frac{2}{6}$ de pulgada, ¿creen que se obtendrá el espesor deseado para construir la base del templete? ¿Cuál sería su grosor? Pueden hacer un diagrama para calcularlo. ¿Cuánto faltaría o sobraría para alcanzar el grosor de la base del templete?

b) ¿Qué fracciones equivalentes utilizaron para calcular el grosor de las tablas de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$ de pulgada?

c) Si las medidas del grosor de las tablas fueran: $\frac{1}{3}$ de pulgada y $\frac{5}{12}$ de pulgada, al empalmarlas, ¿cuál sería su grosor? ¿Cuánto faltaría o sobraría para alcanzar el grosor de la base del templete?

Recuerden que:

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador se requiere convertirlas a fracciones equivalentes con igual denominador.

d) ¿Qué fracciones equivalentes utilizaron para calcular el grosor de las tablas de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$?

e) ¿Cuál de las siguientes operaciones con fracciones equivalentes consideran que es mejor para calcular la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$?

Primer caso	Segundo caso
$\frac{18}{24} + \frac{8}{24} =$	$\frac{9}{12} + \frac{4}{12} =$

f) En cada caso, ¿cómo se obtienen esas fracciones? Si efectúan las operaciones, ¿obtienen el mismo resultado?

III. A continuación aparecen tres opciones de empalmar dos tablas.

a) ¿Cuál se acerca más a la medida deseada de una pulgada? Expliquen su respuesta y los procedimientos que siguieron para resolverlas.

- Las de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.
- Las de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$.
- Las de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{6}$.

b) ¿Cuál de la siguientes opciones consideras que es mejor para calcular el grosor de las tablas de $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$?

$\frac{2}{6} + \frac{5}{12} =$

$\frac{2}{6} + \frac{10}{24} =$

$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} =$

$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} =$

IV. Se ha decidido que el grosor de la base del templete sea de dos pulgadas empalmando tres tablas. Las siguientes sumas indican las diferentes opciones que se tendrían para construirlo. Calcúlenlas y encuentren cuál se acerca más a dos pulgadas. Comenten cómo obtuvieron la respuesta.

a) $\frac{7}{15} + \frac{2}{40} + \frac{19}{20} =$

b) $\frac{27}{24} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$

c) $\frac{3}{4} + \frac{8}{10} + \frac{2}{15} =$

V. Consideren que se quiere formar la base del templete con tablas cuyos grosores se señalan en cada uno de los renglones del siguiente cuadro. ¿Qué medida debe tener el grosor de la tercera tabla para construir la base del templete?

Medida del grosor de la base del templete (en pulgadas)	Grosor de la primera tabla (en pulgadas)	Grosor de la segunda tabla (en pulgadas)	Grosor de la tercera tabla (en pulgadas)
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) =$
3	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{6}$	
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	

>>> A lo que llegamos

Para sumar o restar dos o más fracciones que tienen diferente denominador se deben obtener fracciones equivalentes con denominador común.

- **En algunas ocasiones el denominador común puede ser uno de los denominadores de las fracciones.**

  Por ejemplo, en el siguiente caso: $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6}$ el denominador común de 2, 3 y 6 es 6. Al expresar la operación anterior con fracciones equivalentes con igual denominador se obtiene:

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{8}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{11}{6} - \frac{2}{6} = \frac{9}{6}.$$

- **En otras ocasiones el denominador común se puede obtener multiplicando los denominadores y convirtiendo las fracciones a fracciones equivalentes.**

  Por ejemplo, para la suma $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ un denominador común se puede obtener multiplicando los denominadores: $4 \times 5 = 20$. No hay que olvidar multiplicar también los numeradores. Las fracciones equivalentes que se obtienen son:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}; \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}.$$

  Entonces, la suma queda expresada como: $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}$.

  Si en vez de sumarse estas fracciones se restaran, la expresión y diferencia sería:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}.$$

>>> Lo que aprendimos

1. Escribe el signo $+$ o $-$, según corresponda en cada inciso.

a) $\frac{1}{2} \; \square \; \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) $\left(\frac{1}{4} \; \square \; \frac{1}{4}\right) \square \; \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

c) $\frac{1}{2} \; \square \; \left(\frac{1}{3} \; \square \; \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Encuentra la fracción que falta en cada inciso.

a) $\frac{3}{8} + \boxed{\frac{\quad}{\quad}} + \frac{1}{4} = 1$.

b) $\boxed{\frac{\quad}{\quad}} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

SESIÓN 2

MARCAS ATLÉTICAS

>>> Para empezar

En las competencias de atletismo siempre se busca superar las marcas ya impuestas. En la medición de estas marcas los números fraccionarios y decimales tienen una función muy importante, ya que con ellos se pueden expresar con mayor precisión.

>>> Consideremos lo siguiente

El cuadro presenta las principales marcas internacionales obtenidas en el salto de altura en la categoría femenil y varonil.

Salto de altura			
Récords	**Del mundo**	**Olímpico**	**Atenas 2004**
Varonil	Javier Sotomayor (CUB) $2\frac{1}{2}$ m	Charles Austin (USA) $2\frac{2}{5}$ m	Stefan Hölm (Suecia) $2\frac{1}{3}$ m
Femenil	Stefka Kostadinova (BUL) $2\frac{9}{100}$ m	Stefka Kostadinova (BUL) $2\frac{1}{20}$ m	Hestrie Cloete (Sudáfrica) $2\frac{1}{25}$ m

a) De las marcas obtenidas en la categoría varonil, ¿cuál es mejor, la del mundo o la olímpica? ______________ ¿Por cuánto más? ______________

b) ¿Qué distancia le faltó a Hestrie Cloete para igualar el récord olímpico? ______

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

Recuerden que:
Un número mixto se puede convertir en una fracción impropia.
Además, para sumar o restar fracciones que tienen diferente denominador, primero se deben expresar como fracciones con igual denominador.

I. La diferencia entre la marca del mundo y la de Atenas 2004 en la categoría varonil es: $2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$.

a) ¿Cuál es el valor de esta diferencia? ______________

b) ¿Cuál es la diferencia entre la marca del mundo y la de Atenas 2004 dentro de la categoría femenil? Escriban cómo obtuvieron esa diferencia ______________

____

____

c) ¿Cuál es la diferencia del récord olímpico varonil con respecto a la de Stefan Hölm? ______________

d) ¿Y cuál es la diferencia entre la marca del mundo y la olímpica en la categoría femenil? ______________

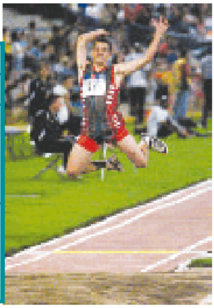
e) Expliquen cómo calcularon la diferencia entre la marca del mundo y la olímpica en la categoría femenil ______________

____

f) ¿Cuál es la diferencia entre la marca mundial y la marca de Hestrie Cloete? ______________ ¿Y la diferencia entre la marca olímpica y la marca de Hestrie Cloete? ______________

II. Utilicen la información del cuadro de marcas de salto de longitud para responder las siguientes preguntas:

Salto de longitud			
Récords	**Del mundo**	**Olímpico**	**Atenas 2004**
Varonil	Mike Powell (EEUU) $8\frac{19}{20}$ m	Bob Beamon (EEUU) $8\frac{9}{10}$ m	Dwight Phillips (EEUU) 8. 59 m
Femenil	Galina Chistyakova (URSS) $7\frac{13}{25}$ m	Jackie Joyner-Kersee (EEUU) $7\frac{2}{5}$ m	Tatiana Lebedeva (URSS) 7.07 m



Recuerden que:

Un número decimal se puede expresar como una fracción.

Por ejemplo:

$1.5 = 1\frac{5}{10} = \frac{15}{10}$.

a) ¿Cuál es la diferencia entre la marca olímpica varonil y la marca olímpica femenil? ______________________________

Una forma de calcular esa diferencia es expresar las fracciones que tienen diferente denominador como fracciones con igual denominador.

b) Completen la resta: $8\frac{9}{10} - 7\frac{2}{5} = 8\frac{9}{10} - 7\frac{\square}{10}$

c) Luego, se restan enteros y fracciones por separado:

$8 - 7 = \boxed{\frac{}{}}$ y $\frac{9}{10} - \frac{\square}{10} = \boxed{\frac{}{}}$

d) El resultado es: $1 + \frac{\square}{10} = 1\frac{\square}{10}$

e) ¿Cuál es la operación que permite calcular la diferencia entre la marca olímpica y la de Atenas 2004 en la categoría femenil?

____

A continuación se muestra una manera de calcular la diferencia: $7\frac{2}{5} - 7.07$. Complétenla:

$$7\frac{2}{5} - 7.07 = 7\frac{2}{5} - 7\frac{7}{\square} = 7\frac{40}{\square} - 7\frac{7}{\square} = \boxed{\frac{}{}}$$

f) La marca juvenil varonil de salto de longitud no aparece en esta tabla, pero es medio metro menor que la obtenida en Atenas 2004. ¿Cuál es la marca juvenil?

____

g) ¿Cuánto le faltó a Dwight Phillips para romper el récord olímpico? ______________

____

h) ¿Cuánto le faltó a Tatiana Lebedeva para romper el récord olímpico? ______________

____

i) ¿Quién estuvo más cerca de romper el récord olímpico: Dwight Phillips o Tatiana Lebedeva? ______________________________

III. Los siguientes resultados son los que obtuvo Ana Gabriela Guevara en los Juegos Olímpicos de Atenas 2004 al correr los 400 metros planos.

1ª Ronda	$50\frac{93}{100}$ segundos
Semifinal	$50\frac{3}{25}$ segundos
Final	49.56 segundos

a) ¿Qué diferencia hay entre el tiempo de la primera ronda y el de la final? ______________________________

b) Si el primer lugar registró $49\frac{41}{100}$ segundos, ¿qué diferencia hay entre el tiempo de Ana en la final y el del primer lugar?

____

>>> A lo que llegamos

Las operaciones de suma y resta de números mixtos se pueden hacer de dos formas:

- **La suma (o resta) de números mixtos se pueden separar en dos sumas (o restas): la de las partes enteras y la de las partes fraccionarias. Después estos dos resultados se deben sumar para obtener el resultado final.**
  Por ejemplo:

$$8\frac{9}{10} + 2\frac{2}{5} = \underbrace{8 + 2}_{\text{Suma enteros}} + \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{2}{5}}_{\text{Suma fracciones}} = 10 + \frac{9}{10} + \frac{4}{10} = 10 + \frac{13}{10} = \underbrace{10 + 1\frac{3}{10}}_{\text{Suma enteros + Suma fracciones}} = 11\frac{3}{10}.$$

- **Otra forma de sumar o restar números mixtos consiste en convertirlos a fracciones impropias. Luego, las fracciones impropias se transforman en fracciones equivalentes con denominador común para poder efectuar la operación de suma o resta:**

Por ejemplo:

$$8\frac{9}{10} + 2\frac{2}{5} = \underbrace{\frac{89}{10} + \frac{12}{5}}_{\text{Suma de fracciones impropias}} = \underbrace{\frac{89}{10} + \frac{24}{10}}_{\text{Suma de fracciones equivalentes}} = \frac{113}{10} = 11\frac{3}{10}.$$

>>> Lo que aprendimos

1. Un corredor va a una velocidad de $9\frac{1}{3}$ metros por segundo. Otro a $8\frac{4}{5}$ metros por segundo.

   a) ¿Quién de los dos corre más rápido? ______________________

   b) ¿Por cuántos metros por segundo? ______________________

2. En el tanque de gasolina de una motocicleta hay $6\frac{1}{2}$ litros. Se agregaron $8\frac{7}{10}$ litros.

   a) ¿Cuánta gasolina hay ahora en el tanque? ______________________

   b) Si en el tanque caben $16\frac{1}{4}$ litros, ¿cuánto más se puede agregar? ______________

3. Completa las siguientes operaciones.

   a) $5\frac{1}{7} + 2\frac{3}{4} = 5 + 2 + \frac{1}{7} + \frac{3}{4} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{4}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{28} = 7 + \frac{25}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

   b) $3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3} = \frac{23}{\boxed{}} - \frac{5}{3} = \frac{\boxed{}}{6} - \frac{10}{\boxed{}} = \frac{13}{6} = 2\frac{\boxed{}}{6}$

   c) $1\frac{5}{20} + 2.02 = \frac{25}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{100} = \frac{\boxed{}}{100} + \frac{202}{\boxed{}} = \frac{327}{\boxed{}} = 3\frac{27}{\boxed{}}$

SESIÓN 3

LOS PRECIOS DE LA CAFETERÍA

>>> Para empezar

Hay diversas situaciones en las que se requiere realizar operaciones de adición y sustracción de decimales, como la compra y venta de artículos.

>>> Consideremos lo siguiente

La carta de alimentos que ofrece una cafetería es la siguiente:

Sopas		Guisados		Bebidas	
Sopa de pasta	$ 9.50	Milanesa	$32.50	Agua de sabor	$ 8.75
Consomé de pollo	$15.50	Pollo frito	$25.80	Agua embotellada	$12
Crema de champiñones	$ 20	Filete de pescado	$30.50	Refresco	$12.25
		Pechuga asada	$ 27.25	Jugo de naranja	$14.50
		Enchiladas	$ 25	Café	$10.50

Dos personas ordenaron sopa, guisado y bebida para cada quien. La primera persona ordenó como guisado unas enchiladas y de bebida un café; la otra persona pidió como sopa un consomé de pollo. Cuando terminaron de comer pidieron la cuenta y pagaron con un billete de $100. La caja registradora marcó $3.50 de cambio. Si todos los alimentos que pidieron eran diferentes:

a) ¿Qué sopa ordenó la primera persona? ____________________

¿El costo de la sopa fue mayor o menor a $15? ____________________

b) ¿Qué guisado y bebida ordenó la segunda persona? ____________________

c) Si hubieran pedido cuentas separadas, ¿cuánto tendría que pagar cada persona?

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En su cuaderno, encuentren el costo de las siguientes comidas:

a) Jugo, sopa de pasta y filete de pescado.

b) Refresco, crema de champiñones y milanesa.

c) Agua de sabor, sopa de pollo y pechuga asada.

d) ¿Cuánto debe pagar una persona si sus alimentos son los más caros de la carta?

e) Y si se piden los alimentos más baratos, ¿cuánto se debe pagar?

II. Una persona ordena los siguientes alimentos: sopa de pasta $9.50, filete de pescado $30.50 y refresco $12.25.

a) Sin realizar operaciones, marquen la respuesta que dé la mejor estimación de lo que tendrá que pagar y escriban por qué.

Entre $30 y $60   Más de $50   Menos de $100   Más de $100

____

b) Para saber cuánto tenía que pagar realizó la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 9.50 \\ +\quad 30.50 \\ 12.25 \\ \hline 52.25 \end{array}$$

Pero en la caja le cobraron $137.75, ¿quién está equivocado? ____________________

¿Cuál es el error? ____________________

c) Escriban en su cuaderno la forma correcta de calcular el costo de lo que consumió esta persona.

III. A continuación se da el costo de dos comidas. Averigüen qué pudo haberse pedido en cada caso. Consideren que el costo total corresponde a una sopa, un guisado y una bebida.

a) Costo total $53.75 ______________________________

b) Costo total $49.80 ______________________________

c) Para encontrar los costos de los alimentos que pudieron haberse pedido, un alumno decide restar a 53.75 el precio de un agua de sabor, que es de $8.75, ¿cómo debe acomodar las cifras de estas cantidades para poder realizar correctamente la operación?

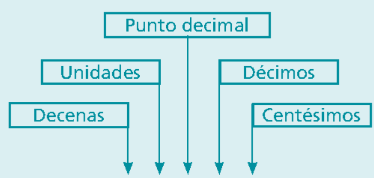
____

____

d) Efectúen, en su cuaderno, las operaciones que necesitan realizar en cada inciso.

Para realizar la adición con números decimales en forma vertical, se procede igual que la adición con enteros, sólo que se requiere cuidar que todos los sumandos estén alineados a partir del punto decimal para identificar cada posición. Se suman décimos con décimos, centésimos con centésimos, y así sucesivamente.

Ejemplo:



Agua de sabor			**8**	**.**	**7**	**5**
Consomé de pollo	**+**	**1**	**5**	**.**	**5**	**0**
Enchiladas		**2**	**5**	**.**	**0**	**0**
		4	**9**	**.**	**2**	**5**

Cuando un sumando tiene menos cifras decimales que otro, se pueden colocar ceros en esas posiciones para alinearlas. Por ejemplo, 25 es igual a 25.00

IV. Formen dos parejas.

Una pareja elige una sopa, un guisado y una bebida y se lo dicen a la otra pareja de alumnos.

La otra pareja tiene un minuto para encontrar los alimentos que eligieron sus compañeros (sopa, guisado y bebida). Gana un punto si lo logra. Si no encuentra los alimentos, gana la primera pareja. Ahora la segunda pareja elige una sopa, un guisado y una bebida. Deben realizar cuatro rondas.

NOTA DE CONSUMO

Pedido No. **1850**

Cliente:

Concepto	Precio
Consomé de pollo	$
	$ 27.25
	$
TOTAL	$ 55.00
Pago	$
Cambio	$ 15.00

>>> Lo que aprendimos

Completa la nota de consumo de la cafetería que se encuentra a la derecha.

a) ¿Qué guisado se ordenó? ____________________

b) Si el cambio fue de $15.00, ¿con qué billetes se pagó?

____

Para restar números decimales se requiere cuidar la colocación de las cifras. Si no hay la misma cantidad de cifras decimales se agregan ceros para igualarla. Posteriormente se restan y se "baja" el punto decimal.

Ejemplo:

Pago con:	**100.00**
Costo total:	**– 64.75**
	35.25

>>> Para saber más

Sobre las marcas atléticas consulta:
http://www.el-mundo.es/jjoo/2004/resultados/2206.html
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Multiplicación y división de fracciones

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen la multiplicación y división con números fraccionarios en distintos contextos.

SESIÓN 1

DE COMPRAS EN EL MERCADO

>>> Para empezar

Seguramente, en algunas ocasiones, te ha tocado ir de compras al mercado y tal vez has comprado mercancías como frutas, verduras, carne, tortillas, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

Una persona compró en el mercado las siguientes mercancías para su despensa.

Mercancías	Cantidad de kilogramos	Precios por kilogramo
Cebollas	3	\$6
Jitomates	$2\frac{1}{2}$	\$9
Carne	$\frac{1}{4}$	\$64
Fresas	$\frac{3}{4}$	\$24

a) ¿Por cuál de las cuatro mercancías pagó más? ____________________

b) ¿Cuánto pagó en total? ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Consideren los precios de las mercancías dados en la tabla para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto cuesta el kilogramo (kg) de cebolla? ____________________

b) Si compran tres veces esa cantidad de cebollas, es decir 3 kg, ¿cuánto deben pagar?

____

c) ¿Cuánto cuesta el kg de jitomate? ______

d) Si compran dos kg de jitomate, ¿cuánto deben pagar? ______

e) ¿Y si compran medio kg de jitomate? ______

Para saber cuánto pagó esa persona por el jitomate debe calcularse cuánto es 2 veces 9 pesos más la mitad de 9 pesos, es decir:

$$\underbrace{9 + 9}_{\text{2 veces 9}} + \underbrace{4.50}_{\text{la mitad de 9.}}$$

2 veces 9 + la mitad de 9.

f) ¿Cuánto deben pagar por 2 $\frac{1}{2}$ kg de jitomates? ______

______

g) ¿Cuánto pagarían por 3 $\frac{1}{2}$ kg de cebolla? ______

Para saber cuánto cuestan 3 kg de cebollas, multiplicas 3 × 6. De la misma manera, para calcular el costo de 2 $\frac{1}{2}$ kg de jitomates habrá de multiplicar 2 $\frac{1}{2}$ × 9.

h) Un kg de carne cuesta \$64. ¿Cuánto deben pagar por $\frac{1}{4}$ de kilogramo de carne?

______

i) ¿Cuánto cuesta $\frac{1}{4}$ de kg de fresas? ______ ¿Y cuánto pagas por $\frac{3}{4}$ de kg? ______

j) Si por $\frac{1}{4}$ de kg de fresas pagan 6 pesos, ¿cuánto dinero pagarían por $\frac{3}{4}$ de kg de fresas?

______

II. Anoten en la siguiente tabla la cantidad de dinero que pagó esa persona por cada mercancía que compró.

Mercancías	Cantidad de kilogramos	Cantidad de dinero a pagar
Cebollas	3	
Jitomates	$2\frac{1}{2}$	
Carne	$\frac{1}{4}$	
Fresas	$\frac{3}{4}$	

a) ¿Por cuál de las cuatro mercancías pagó más dinero? ______

b) Sumen la cantidad de dinero que pagó esa persona por las cuatro mercancías, ¿cuánto pagó en total? ______

Comparen sus respuestas y comenten:

Si en vez de comprar $\frac{1}{4}$ de kg de carne, la persona compra $\frac{3}{4}$ de kg, ¿cuánto debe pagar?

>>> A lo que llegamos

Observen que el cálculo de la cantidad a pagar por una mercancía se puede interpretar de la siguiente manera:

Mercancía y precio	Cantidad de kilogramos que se compraron	Se calcula encontrando	Esto puede escribirse como	Cantidad de dinero a pagar
Cebollas $6 el kg	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ de 6 pesos	$\frac{1}{4} \times 6$	$1.5
	$\frac{3}{4}$	3 veces $\frac{1}{4}$ de 6 pesos	$\frac{3}{4} \times 6$	$4.5
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ de 6 pesos	$\frac{1}{3} \times 6$	$2
	$\frac{2}{3}$	2 veces $\frac{1}{3}$ de 6 pesos	$\frac{2}{3} \times 6$	$4
	$\frac{5}{2}$	5 veces $\frac{1}{2}$ de 6 pesos	$\frac{5}{2} \times 6$	$15

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela, 240 alumnos presentaron un examen.

a) Si de estos 240 alumnos sólo aprobaron las $\frac{3}{5}$ partes, ¿cuántos lo aprobaron?

______

b) Si $\frac{2}{6}$ de los alumnos que aprobaron son mujeres, ¿cuántas mujeres aprobaron?

______

c) Del total de alumnos que presentaron el examen, $\frac{5}{12}$ están en primer grado, y de éstos, $\frac{4}{5}$ lo aprobaron. ¿Cuántos alumnos de primer grado lo aprobaron? ______

____

2. Considera el precio por kg de cada una de las mercancías que aparecen en la tabla y la cantidad de dinero que se pagó.

Mercancías	Precio por kilogramo	Cantidad de dinero que se pagó
Cebollas	$6	$20
Jitomates	$9	$6
Carne	$64	$24
Fresas	$24	$51

Calcula la cantidad de kg que se compraron de:

a) cebollas ______________________________

b) jitomates ______________________________

c) carne ______________________________

d) fresas ______________________________

SUPERFICIES Y FRACCIONES

SESIÓN 2

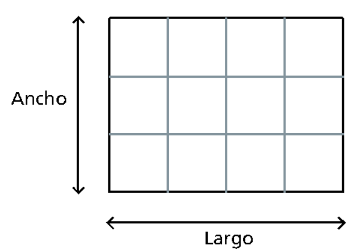
>>> Para empezar

El área es la medida en unidades cuadradas de una superficie. El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el ancho por el largo.

Calcula el área de una lámina rectangular que mide 3 m de ancho y 4 m de largo:

____

____



Una manera de representar esta situación es la siguiente:

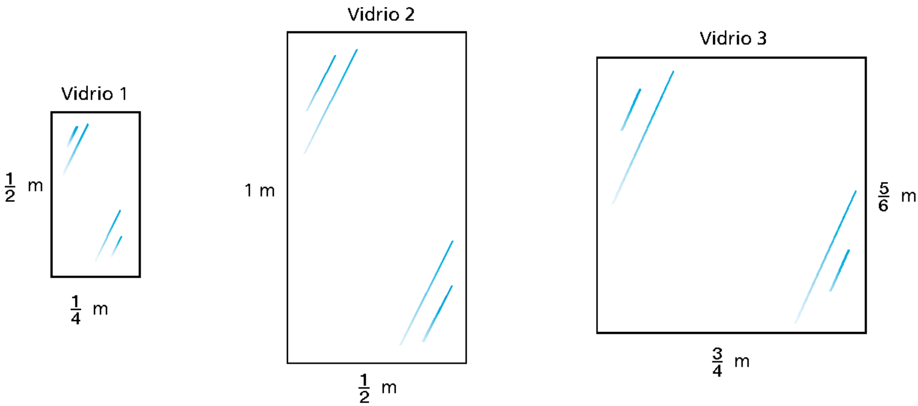
____

____

Las dimensiones de un rectángulo también pueden darse en fracciones.

>>> Consideremos lo siguiente

Una persona necesita comprar tres vidrios con las siguientes medidas:

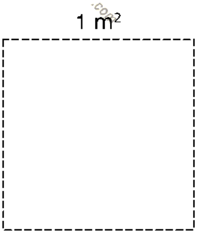


Para determinar el costo de un vidrio se necesita conocer su área. Busquen una forma de calcular el área de cada vidrio y aplíquenla.

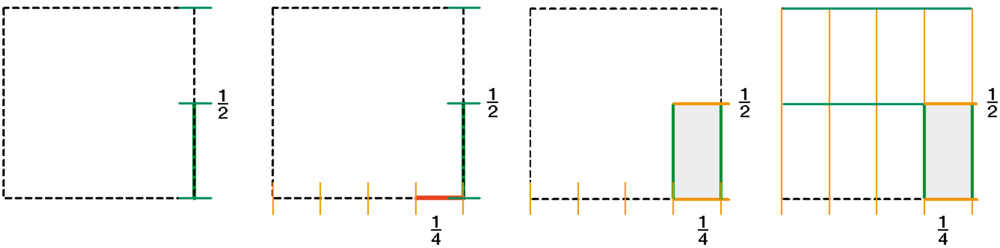
Comenten al grupo cómo calcularon el área de cada vidrio y cuál fue el área que obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. Consideren que la siguiente figura cuadrada representa 1 m² de vidrio.



En la siguiente secuencia de figuras se presenta una forma de obtener el área del vidrio 1.



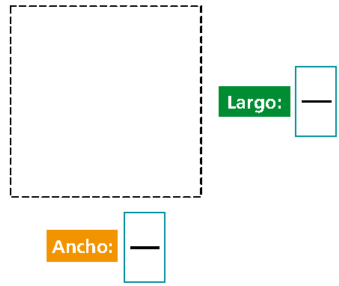
En la primera figura se ha representado la medida del largo del vidrio, y en la segunda la del ancho. En la tercera figura se ha coloreado la superficie que corresponde al vidrio 1. Para saber qué parte de toda la figura es esa región coloreada, se ha dividido todo el cuadrado a partir de las marcas que se hicieron en sus lados.

a) ¿En cuántas partes iguales quedó dividido el metro cuadrado? ____________

b) ¿Cuántas de esas partes representan la superficie del vidrio 1? ____________

c) ¿Cuál es el área del vidrio 1? ____________________________

- De nuevo usen una figura de 1 m², pero ahora para representar el vidrio 2.

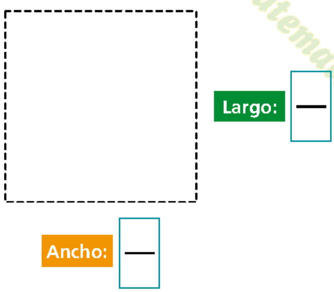


a) ¿En cuántas partes iguales quedó dividido esta vez el metro cuadrado? ____________________

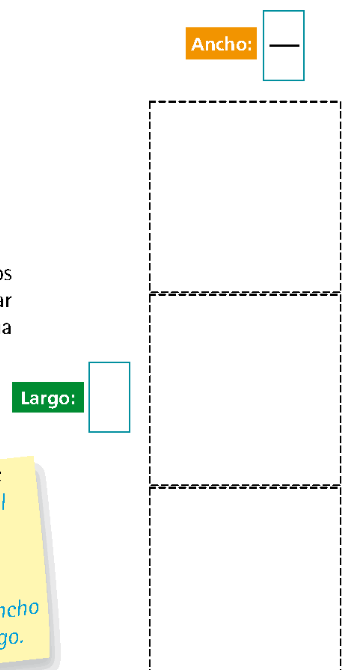
b) ¿Cuántas de esas partes representan la superficie del vidrio 2?
____

c) ¿Cuál es el área del vidrio 2? ____________

d) Si el vidrio mide $\frac{5}{6}$ de metro de largo y $\frac{3}{4}$ de metro de ancho, ¿cuál es su área? ____________



II. Cuando se necesita representar una medida mayor a 1 m, se unen tantos cuadros de 1 m² como se requieran. Por ejemplo, si se quiere representar un vidrio que mide 3 m de largo y $\frac{2}{3}$ de m de ancho, se requiere una figura como la de la derecha:



a) ¿Cuál es su área? ____________________

Utilicen la figura para encontrarla.

b) En sus cuadernos representen el área de los vidrios cuyas medidas sean:

- Largo: $\frac{4}{5}$ m. Ancho: $\frac{3}{4}$ m.
- Largo: 6 m. Ancho: $\frac{2}{3}$ m.

c) ¿Cuál es el área de cada vidrio?

Recuerden que:
Para calcular el área de un rectángulo se multiplica la medida del ancho por la del largo.

Para calcular el área de un vidrio de 3 m de largo por 2 m de ancho se multiplica 3×2. El área de este vidrio es de 6 m².
De la misma manera, para calcular el área de un vidrio de $\frac{1}{2}$ m de largo por $\frac{1}{4}$ de m, hay que multiplicar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$. El área de este vidrio es de $\frac{1}{8}$ de m².

III. A partir de los resultados anteriores completen la siguiente tabla. Observen el ejemplo.

Medidas del vidrio (m)	Área del vidrio que obtuvieron con el modelo (m^2)	Área del vidrio = largo × ancho (m^2)
Largo: $\frac{1}{2}$ ancho: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
Largo: 1 ancho: $\frac{1}{2}$		$1 \times \frac{1}{2} =$
Largo: 3 ancho: $\frac{2}{3}$		$3 \times \frac{2}{3} =$
Largo: $\frac{5}{6}$ ancho: $\frac{3}{4}$		$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} =$
Largo: 6 ancho: $\frac{2}{3}$		$6 \times \frac{2}{3} =$

a) Comenten cómo obtienen el producto de dos fracciones a partir de los términos de las fracciones que se multiplican.

b) ¿Cuál de los siguientes dos procedimientos para multiplicar fracciones es correcto y cuál es incorrecto?

	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	$3 \times \frac{2}{3}$
Procedimiento 1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$	$3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
Procedimiento 2	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{1 \times 2} =$	$3 \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

>>> A lo que llegamos

Para multiplicar dos fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Por ejemplo: $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3\times1}{5\times6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

>>> Lo que aprendimos

1. Si el precio del metro cuadrado de vidrio es de $200.00, ¿cuánto cuesta cada vidrio?

Completen la siguiente tabla anotando el área de cada vidrio y obteniendo su precio. Observen los ejemplos:

Medidas del vidrio		Área del vidrio (m^2)	Precio del vidrio ($)
Largo (m)	Ancho (m)		
1	1	1	$200 \times 1 =$ **200**
2	1	2	$200 \times 2 =$ **400**
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$200 \times \frac{1}{8} = \frac{200 \times 1}{8} = \frac{200}{8} = \mathbf{25}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{1}{2}$		
3	$\frac{2}{3}$		
6	$\frac{2}{3}$		

2. Se tienen lienzos cuadrados de tela con las medidas que se indican en la tabla. Calculen el área de cada lienzo y contesten las preguntas.

Lienzos	Medida del lado (m)	Área (m^2)
A	$\frac{1}{8}$	
B	$\frac{1}{4}$	
C	$\frac{1}{2}$	
D	$\frac{3}{2}$	

a) ¿Cuál es el lienzo más grande? ______________________

b) ¿Cuál es el lienzo más pequeño? ______________________

3. Don José tiene una parcela de forma cuadrada.

a) Si aró las $\frac{3}{4}$ partes de su parcela y sembró $\frac{4}{5}$ partes de la parte arada, ¿qué parte de la parcela sembró?

____

b) En la parte de la parcela que está sin arar construyó un corral que ocupa la tercera parte de ésta. ¿Qué parte de la parcela ocupa el corral?

____

c) Si la parcela mide de largo $\frac{2}{3}$ de kilómetro. ¿La parcela mide más o menos de un kilómetro cuadrado?

____

d) ¿Cuál es el área en kilómetros cuadrados de la parcela de don José?

____

¿CÓMO SERÍAN LAS MARCAS ATLÉTICAS EN EL ESPACIO?

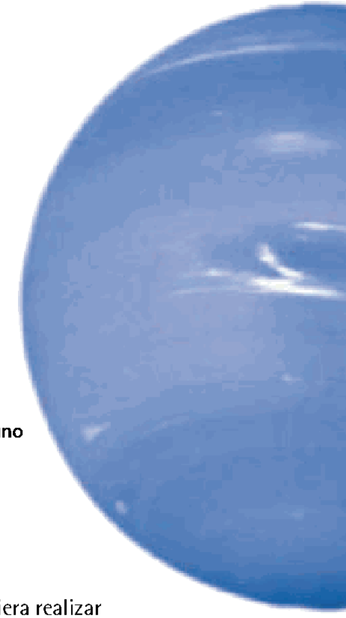
>>> Para empezar

El sistema solar y la fuerza de gravedad

Los planetas y los satélites atraen a los objetos con distinta intensidad.

Por ejemplo, la fuerza de gravedad en la Tierra es 6 veces mayor que la de la Luna. Esto significa que en la Luna una persona saltaría 6 veces más alto de lo que salta en la Tierra.

Si en la Tierra un competidor de salto de altura salta 2 m, ¿cuánto saltaría en la Luna? _______________



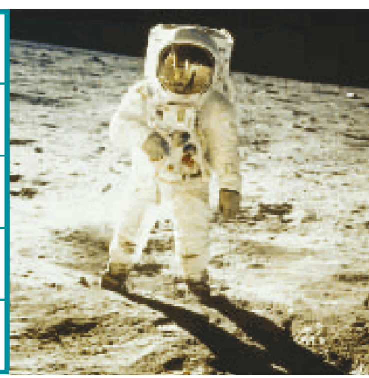
Luna  **Tierra**  **Neptuno**

>>> Consideremos lo siguiente

En Neptuno la fuerza de gravedad es más grande que en la Tierra. Si se pudiera realizar el salto de altura en Neptuno, la altura que se alcanzaría sería $\frac{5}{6}$ de la que se alcanzaría en la Tierra.

Completen la siguiente tabla para encontrar las medidas de diferentes saltos.

Medida del salto en la Tierra (m)	Medida del salto en Neptuno (m)
3	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{4}{5}$	
$\frac{3}{2}$	



a) ¿En dónde alcanzan mayor altura los saltos, en la Tierra o en Neptuno?

____

b) ¿Qué operación tendría que hacerse para saber cuánto es $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$?

____

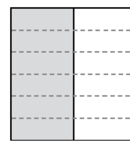
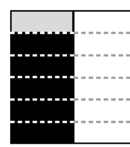
Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, algunos equipos resolvieron la operación $\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{2}$ de las siguientes maneras.

<table>
<tr><th>Equipo 1</th><th>Equipo 2</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{12}$

5 veces $\frac{1}{12}$ son $\frac{5}{12}$</td><td>En una figura representó $\frac{1}{2}$

Luego, dividió el medio en sextos

Y tomó 5

Observó que el resultado es $\frac{5}{12}$</td></tr>
<tr><th>Equipo 3</th><th>Equipo 4</th></tr>
<tr><td>Sumó $\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6}$</td><td>Multiplicó $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{12}$</td></tr>
</table>

a) ¿Usaron ustedes alguno de estos procedimientos? ________________,

¿Cuál? ________________________________

b) ¿Cuáles equipos siguieron un procedimiento correcto?

____

____

c) Traten de explicar el procedimiento del equipo 1 ______________________

____

II. Completen la siguiente tabla

Medida del salto en la Tierra (m)	Cálculo de la medida del salto en Neptuno	Medida del salto en Neptuno (m)
3	$\frac{5}{6} \times 3$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$	
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6} \times \frac{3}{2}$	

III. En Marte la fuerza de gravedad es menor que en la Tierra, por lo que atrae a los objetos con menos fuerza. En ese planeta los saltos serían $2\frac{1}{2}$ veces más altos que en la Tierra.

a) Si un salto en la Tierra midió 3 m, ¿en Marte ese salto será mayor o menor que en la Tierra? ______________ ¿Por qué? __________________

____

b) Un procedimiento para calcular cuánto mediría el salto en Marte consiste en calcular 2 veces 3 m más media vez 3 m, es decir,

$$\underbrace{3 + 3}_{\text{2 veces 3}} + \underbrace{1\tfrac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\text{ vez 3}} = 7\tfrac{1}{2}$$

- Usando este procedimiento, en su cuaderno, calculen la medida del salto en Marte si la medida del salto en la Tierra es: $\frac{1}{2}$ m.

IV. Considerando lo anterior, completen la tabla.

Medida del salto en la Tierra (m)	Cálculo de la medida del salto en Marte	Medida del salto en Marte (m)
3	$2\frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2} \times \frac{3}{1}$	
$\frac{1}{2}$		
$\frac{4}{5}$		
$\frac{3}{2}$		

Contesten las siguientes preguntas:

a) Si se sabe que en un planeta el salto es $\frac{5}{12}$ del salto en la Tierra, ¿en ese planeta el salto será mayor o menor que en la Tierra? __________ ¿Por qué? __________

b) Y si se sabe que en un planeta el salto es $\frac{7}{5}$ del salto en la Tierra, ¿en ese planeta el salto será mayor o menor que en la Tierra? __________ ¿Por qué?

>>> A lo que llegamos

Cuando se multiplica cualquier número por una fracción menor que 1, el producto es menor que ese número, porque se toma sólo una parte de él:

$\frac{5}{6} \times 9 = \frac{5}{6} \times \frac{9}{1} = \frac{45}{6} = 7\frac{3}{6} = 7\frac{1}{2}$; $\quad 7\frac{1}{2}$ es menor que 9;

$\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$; $\quad \frac{5}{12}$ es menor que $\frac{1}{2}$;

Y cuando se multiplica cualquier número por una fracción mayor que 1, el producto es mayor que ese número, porque se toma más de una vez:

$\frac{5}{2} \times 4 = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{20}{2} = 10$; $\quad$ 10 es mayor que 4;

$\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$; $\quad \frac{5}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$.

>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno, efectúa las siguientes multiplicaciones y explica por qué el resultado es mayor o menor que el número que se escribe en negritas.

a) $\frac{3}{2} \times \mathbf{\frac{5}{6}} =$ c) $\frac{9}{7} \times \mathbf{\frac{8}{5}} =$ e) $\frac{4}{3} \times \mathbf{5} =$ g) $\frac{2}{7} \times \mathbf{\frac{1}{3}} =$

b) $\frac{2}{3} \times \mathbf{\frac{5}{6}} =$ d) $\frac{2}{3} \times \mathbf{5} =$ f) $\frac{4}{5} \times \mathbf{\frac{5}{4}} =$ h) $\frac{7}{2} \times \mathbf{\frac{1}{3}} =$

HAY TELA DE DONDE CORTAR

SESIÓN 4

>>> Para empezar

En un taller de costura se realizan cálculos con el fin de conocer cuánta tela es necesaria para confeccionar una o varias prendas.

Si tienen un rollo de tela de 18 m de largo y quieren cortar lienzos de 3 m de largo, ¿cuántos lienzos pueden obtener?

____

>>> Consideremos lo siguiente

En un taller de costura tienen un rollo de tela de 3 m, y necesitan cortar lienzos de $\frac{3}{4}$ de m cada uno. ¿Cuántos lienzos se obtienen? ______________________

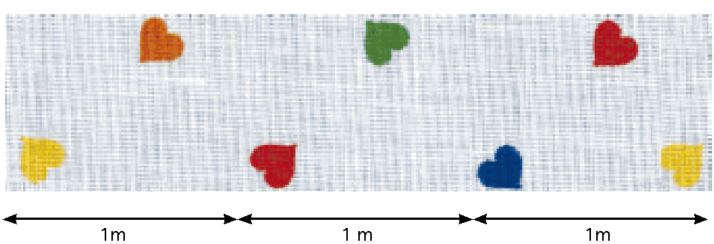
Y si el rollo tuviera $3\frac{1}{2}$ m y necesitaran cortar lienzos de un $\frac{1}{4}$ de m cada uno, ¿cuántos lienzos se obtendrían? ______________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. La siguiente figura representa el rollo de tela, que es de 3 m.

a) Marquen la medida del largo de los lienzos ($\frac{3}{4}$ de m) tantas veces como se pueda a lo largo de la tela.



b) ¿Cuántos lienzos obtuvieron? ______________________

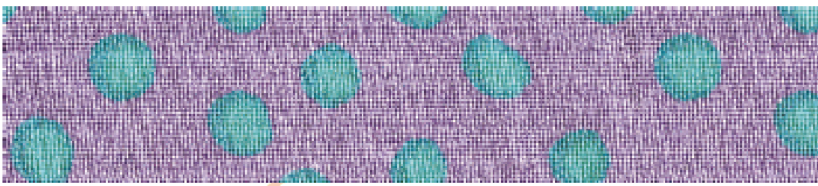
c) Completen la siguiente tabla. Pueden apoyarse en representaciones gráficas como las anteriores.

Cantidad de tela disponible	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m
Medida del largo de los lienzos	3 m	2 m	1 m	$\frac{1}{4}$ de m	$\frac{3}{4}$ de m	$\frac{1}{2}$ de m	$\frac{1}{6}$ de m
Número de lienzos que se obtienen							

II. Si el rollo de tela fuera de $3\frac{1}{2}$ m y cortaran lienzos de $\frac{1}{4}$ de m:

a) ¿Cuántos lienzos obtendrían? ______________________

b) Representen esta situación en la siguiente figura.



III. En cada una de estas situaciones se puede realizar una división. Indíquenla en las tablas y contesten las siguientes preguntas:

Cantidad de tela a cortar	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m
Medida del largo de los lienzos	3 m	1 m	$\frac{1}{2}$ m	$\frac{3}{4}$ m	$\frac{1}{3}$ m
Número de lienzos que se obtienen	$3 \div 3 = \square$	$3 \div \square = 3$	$\square \div \frac{1}{2} = 6$	$3 \div \frac{3}{4} = \square$	$3 \div \frac{1}{3} = \square$

Cantidad de tela a cortar	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m	$3\frac{1}{2}$ m
Medida del largo de los lienzos	$3\frac{1}{2}$ m	$\frac{1}{2}$ m	$\square$ m	1 m
Número de lienzos que se obtienen	$3\frac{1}{2} \div \square = 1$	$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \square$	$3\frac{1}{2} \div \square = 14$	$\square \div \square = \square$

a) Si el rollo de tela mide 3 m y cortan lienzos de $\frac{1}{3}$ de m, ¿cuántos lienzos obtienen? Escriban la división que le corresponde a esta situación:

____

b) De acuerdo con los datos de las tablas, ¿qué situación representa la división: $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 7$? ____

c) Y si el rollo de tela mide $3\frac{1}{2}$ m y cortan lienzos de $\frac{1}{6}$ de m, ¿cuántos lienzos obtienen? Escriban la división que le corresponde a esta situación:

____

d) Si tienen 6 lienzos de $\frac{1}{2}$ m y los unen, ¿cuántos m de tela en total tienen?

____

Recuerden que:

Un número mixto se puede expresar como fracción impropia. Por ejemplo: $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

- Completen la tabla.

Resultados de las divisiones tomando los datos de la tabla anterior	Resultados de las multiplicaciones de acuerdo con lo que estudiaron en la sesión 1
$3 \div 3 =$	$3 \times \frac{1}{3} =$
$3 \div \frac{1}{2} =$	$3 \times \frac{2}{1} =$
$3 \div \frac{1}{4} =$	$3 \times \frac{4}{1} =$
$3 \div \frac{3}{4} =$	$3 \times \frac{4}{3} =$
$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} =$	$3\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} =$
$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} =$	$3\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} =$

>>> A lo que llegamos

La fracción recíproca de una fracción es otra fracción que se obtiene al invertir sus términos. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \text{ su recíproco es } \frac{3}{2}.$$

- Contesten las siguientes preguntas:

  a) Verifiquen que los resultados que se dan en cada renglón de la tabla anterior sean iguales. ______________________________

  b) ¿Qué sucede si multiplican una fracción por su fracción recíproca? ¿Cuál es el resultado de multiplicar $\frac{1}{4} \times \frac{4}{1}$? ______________________________

  ____

  ____

>>> A lo que llegamos

Dividir un entero entre una fracción es equivalente a multiplicar el entero por el recíproco de la fracción. Por ejemplo:

$$3 \div \frac{3}{4} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{3 \times 4}{1 \times 3} = \frac{12}{3} = 4;$$

y

$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = \frac{3}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{1 \times 1} = \frac{6}{1} = 6;$$

Dividir cualquier fracción (dividendo) entre otra (divisor) es equivalente a multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.
Por ejemplo:

$$3\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{7 \times 4}{2 \times 1} = \frac{28}{2} = 14.$$

¿CUÁNTAS BOTELLAS DE JUGO SE NECESITAN?

>>> Para empezar

En una planta de refrescos y jugos se tienen distintas presentaciones de un mismo producto. Un tanque de jugo de manzana tiene 270 ℓ, con los que se llenarán 108 botellas, sin que sobre jugo.

¿De qué capacidad deben ser las botellas?

____

¿Qué operación realizaron para encontrar la respuesta?

____

>>> Consideremos lo siguiente

Se va a repartir $5\frac{1}{4}$ ℓ de jugo de manzana entre 14 botellas. Se quiere que en cada botella haya la misma cantidad de líquido y que no sobre. ¿Qué cantidad de líquido quedará en cada botella? ______________________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo, cada alumno planteó las siguientes operaciones para resolver el problema.

José	María	Teresa	Julio
$5\frac{1}{4} \div 14$	$14 \div 5\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4} \times \frac{1}{14}$	$5\frac{1}{4} \times 14$

a) ¿Con cuáles de estas operaciones se puede resolver el problema? ______________________________

b) En su cuaderno, efectúen los cálculos y comparen sus resultados.

c) Identifiquen el dividendo, el divisor y el cociente en este problema.

II. En su cuaderno, realicen las siguientes divisiones de fracciones.

- $2 \div \frac{1}{5}$
- $3\frac{2}{5} \div 2\frac{1}{2}$
- $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$
- $1\frac{1}{3} \div 2$
- $\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

Recuerden que:

Los elementos de una división son: divisor, dividendo y cociente.

Por ejemplo:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{Dividendo}} \div \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{divisor}} = \underbrace{2.}_{\text{cociente}}$$

Consideren los resultados de las divisiones anteriores para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿En qué divisiones obtuvieron un cociente entero?

____

b) ¿En qué divisiones el resultado fue menor que el dividendo?

____

c) ¿Y en cuáles fue mayor que el dividendo?

____

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

- **Cuando el resultado es un número entero, como 1, 2, 3, o cualquier otro, se puede decir que ese número representa el número de veces que cabe el divisor en el dividendo.**
- **Observen que el resultado de la división es menor que el dividendo si el divisor es mayor que uno.**
- **Observen que el resultado de la división es mayor que el dividendo si el divisor es menor que uno.**

III. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Cuatro personas comparten en partes iguales un refresco familiar de $2\frac{1}{2}$ ℓ. ¿Qué cantidad de refresco le toca a cada quién? _______________

____

b) La cantidad de calorías que proporciona un refresco de manzana es $1\frac{2}{3}$ veces mayor que la que da el jugo de manzana. Si un vaso de refresco tiene 40 calorías. ¿Cuántas calorías tiene un vaso de jugo? _______________

____

c) Una lancha recorre $27\frac{1}{2}$ km en 2 horas. ¿Cuál es su velocidad por hora? _______________

____

d) Una llave de agua da $3\frac{3}{4}$ ℓ de agua por minuto. ¿En cuántos minutos da 32 ℓ?

____

e) En una escuela $\frac{3}{5}$ de sus estudiantes aprobaron el examen. Si lo aprobaron 144 alumnos, ¿cuántos alumnos lo presentaron? ______________________________

____

f) Completa la siguiente tabla, calculando cuántos moños de $\frac{1}{4}$ de metro de listón se obtienen en cada caso.

Metros de listón que tiene una pieza	Cantidad de listón que se requiere para hacer un moño	Número de moños que se pueden hacer
2	$\frac{1}{4}$ m	
$5\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ m	
$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ m	

>>> Para saber más

Sobre los planetas y la fuerza de gravedad consulta:
http://www.universum.unam.mx/
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007]
Universum, Museo de las Ciencias
Ruta: SALAS → UNIVERSO (seleccionar la imagen que tiene dos planetas) → Sistema Solar → Equipos de la sección Sistema Solar (dar clic en el tema que se quiera consultar).

Multiplicación de números decimales

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.

SESIÓN 1

TRES VECES Y MEDIA

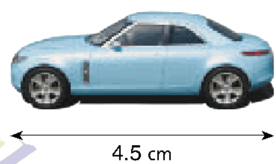
>>> Para empezar

En un dibujo a escala todas las medidas deben ser proporcionales a las reales.

El auto que aparece en esta foto está a escala del auto real. El factor de escala es 100.

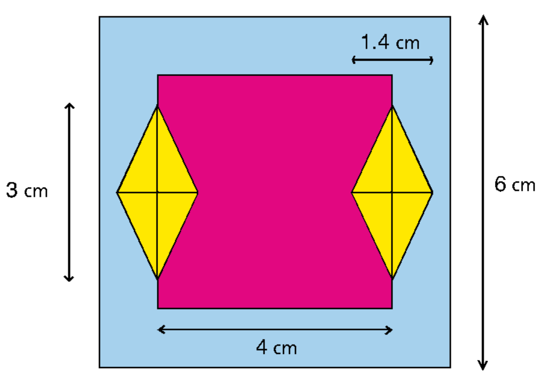
¿Cuánto mide en la foto el largo del auto? ______________________ , ¿cuánto mide el largo del mismo auto en la realidad? ______________________

Recuerda que:
Si el factor de escala es 100 todas las medidas son 100 veces más grandes



>>> Consideremos lo siguiente

Observen el siguiente dibujo y hagan otro a escala que sea $3\frac{1}{2}$ veces más grande que el original. La tabla puede servirles, complétenla sin usar calculadora.



Medidas en el dibujo original	Medidas en la ampliación a escala
6 cm	
4 cm	
3 cm	
1.4 cm	

Comenten ante su grupo cómo calcularon las medidas de la copia a escala. En particular platiquen cómo calcularon la medida real de la diagonal menor del rombo, que en el dibujo mide 1.4 cm; entre todos elijan cuál de los procedimientos mostrados consideran que es el más eficaz y digan por qué.

>>> Manos a la obra

I. Calcular las medidas para que sean $3\frac{1}{2}$ veces de la original es lo mismo que multiplicar por 3.5. Completen la tabla usando los resultados que obtuvieron en el problema inicial.

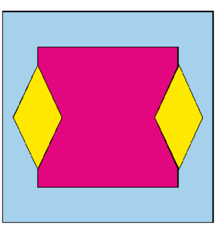
Multiplicación	Producto (resultado de la multiplicación)
3.5×6	
3.5×4	
3.5×3	
3.5×1.4	

- Completen estos dos procedimientos para calcular 3.5×1.4:

a) Al sumar tres veces y media el 1.4, queda ____________________

b) Al multiplicar $3\frac{1}{2}$ por $1\frac{4}{10}$, queda ____________________

II. Calculen las medidas del lado de 4 cm y el de 6 cm con los factores de escala que aparecen en la tabla.



Factor de escala	Medida del lado de 4 cm	Medida del lado de 6 cm
2	8 cm	12 cm
5		
0.5		
1.5		
2.5		
0.25		
0.1		
0.01		

Recuerda que:
Los números decimales pueden expresarse como una fracción común:
$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

a) ¿Con qué factores de escala la copia será mayor que el dibujo original?

____

b) ¿Con cuáles de estos factores de escala la copia será de menor tamaño que el dibujo original? _______________

c) ¿Qué tienen en común los factores de escala que producen una copia menor que el original? _______________

d) Anoten cuatro factores de escala con punto decimal que sean diferentes a los de la tabla y que generen una copia menor que el original _______________

____

e) ¿Qué factor de escala debe usarse para hacer una copia en la que el lado de 4 cm mida 22 cm? _______________

f) ¿Qué factor de escala debe usarse para hacer una copia en la que el lado de 4 cm mida 3 cm? _______________

Comenten con otras parejas sus resultados hasta este punto; si no coinciden analicen por qué.

III. Para calcular la medida del lado de 4 cm, cuando el factor de escala es 0.5, se puede efectuar la siguiente multiplicación; resuélvanla:

$$0.5 \times 4 = \underline{\qquad\qquad}$$

- El resultado de esta operación equivale a dividir 4 entre un número; ¿entre cuál número? _______________
- Algunas multiplicaciones de números con punto decimal pueden calcularse de otra manera. Completen la siguiente tabla.

Multiplicar por:	Es lo mismo que multiplicar por la fracción:	Y es lo mismo que:
0.5	$\frac{1}{2}$	dividir entre 2
0.25		
0.1		
0.01		
0.125		
0.75		

Escriban dos maneras diferentes de calcular 0.75×4:

____

____

IV. Resuelve **mentalmente** las siguientes multiplicaciones:

$0.5 \times 40 =$ ____________________

$0.25 \times 200 =$ ____________________

$1.5 \times 80 =$ ____________________

$2.5 \times 8 =$ ____________________

$10 \times 2.5 =$ ____________________

$4 \times 3.5 =$ ____________________

$4.5 \times 0.5 =$ ____________________

$800 \times 0.125 =$ ____________________

V. Platica a tus compañeros cómo resolviste mentalmente las multiplicaciones 10×2.5 y 1.5×80. Elijan una de estas dos operaciones, anoten en el pizarrón los diferentes procedimientos y luego compárenlos, ¿cuál creen que es el más rápido para hacer la operación?

>>> A lo que llegamos

- **Multiplicar un número por 3.5 significa tomar 3 veces y media el valor del número; multiplicar por 4.1 significa tomar 4 veces el número más una décima del mismo número.**
- **Algunas multiplicaciones de números con punto decimal pueden resolverse más rápidamente de otra manera, por ejemplo, multiplicar 600 por 0.25 equivale a dividir 600 entre 4 y da como resultado 150.**
- **Al multiplicar un número por un factor menor que la unidad el resultado, será menor que el número; por ejemplo, 0.35×8 da como resultado un número menor que 8.**

Más de tres, pero menos de cuatro

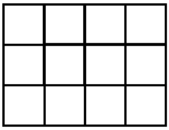
Como han estudiado, los números decimales son útiles en muchas situaciones de la vida real, como el uso de las escalas.

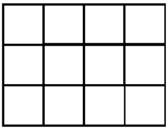
EL PUNTO ES EL ASUNTO

>>> Para empezar

En la secuencia 10 aprendiste a representar la multiplicación de fracciones por medio de áreas de rectángulos.

Calcula y representa el resultado de estas multiplicaciones.

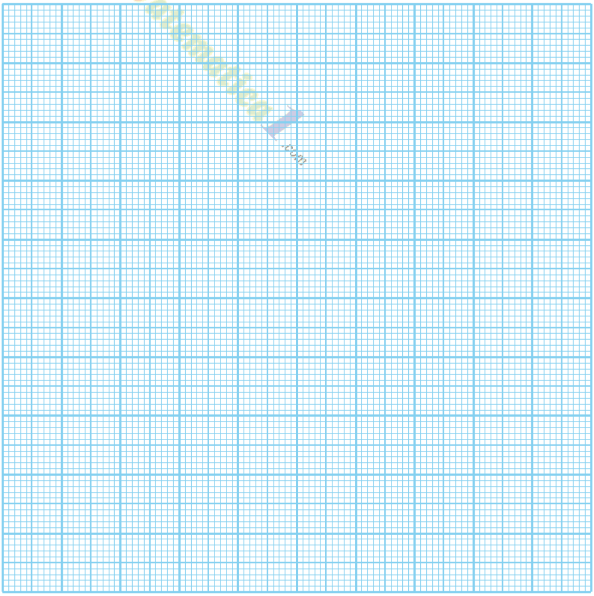
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} =$ 

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$ 

En esta sesión utilizarás el mismo procedimiento para multiplicar números con punto decimal.

>>> Consideremos lo siguiente

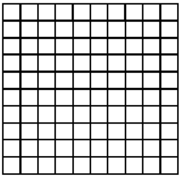
Utilicen el siguiente cuadrado para calcular el resultado de la multiplicación 0.48 × 0.6 considerando que la medida del lado del cuadro es la unidad.



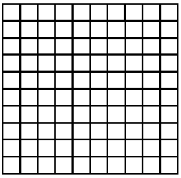
Expliquen a sus compañeros cómo hallaron la respuesta de 0.48 × 0.6 utilizando el cuadrado anterior. En su explicación digan cómo hicieron para ubicar el número 0.48 en un lado del cuadrado y cómo para ubicar el 0.6. Expliquen también qué número decimal es el resultado y cómo se interpreta.

>>> Manos a la obra

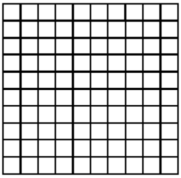
I. Representen y calculen el resultado de las multiplicaciones indicadas, consideren que la medida del lado de cada cuadrado es una unidad.



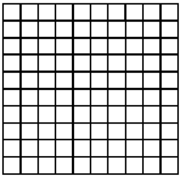
$0.3 \times 0.9 =$ ______



$0.4 \times 0.4 =$ ______



$0.8 \times 0.9 =$ ______



$0.7 \times 0.6 =$ ______

a) ¿En cuántas partes está dividido cada cuadrado unidad? ____________________

b) ¿Qué fracción del cuadrado unidad es cada una de esas partes? ______________

c) Al multiplicar décimos por décimos, ¿qué se obtiene en el resultado? Subrayen la respuesta correcta.

Décimos **Centésimos** **Milésimos** **Diezmilésimos**

II. Resuelvan las siguientes operaciones.

$\frac{4}{100} \times \frac{3}{10} =$ $\frac{8}{1000} \times \frac{4}{10} =$ $\frac{9}{10} \times \frac{6}{10} =$ $\frac{6}{10} \times \frac{9}{100} =$

$\frac{12}{100} \times \frac{6}{10} =$ $\frac{125}{1000} \times \frac{2}{10} =$ $\frac{8}{10} \times \frac{12}{10} =$ $\frac{25}{100} \times \frac{9}{100} =$

III. Utilicen los resultados anteriores para completar las siguientes multiplicaciones, pero ahora escriban el resultado utilizando números con punto decimal.

$0.04 \times 0.3 =$ ____________________

$0.008 \times 0.4 =$ ____________________

$0.9 \times 0.6 =$ ____________________

$0.6 \times 0.09 =$ ____________________

$0.12 \times 0.6 =$ ____________________

$0.125 \times 0.2 =$ ____________________

$0.8 \times 1.2 =$ ____________________

$0.25 \times 0.09 =$ ____________________

IV. Analicen los resultados anteriores y completen la tabla.

Al multiplicar:	Se obtiene:
décimos por décimos	centésimos
	milésimos
centésimos por centésimos	
milésimos por centésimos	
	millonésimos

V. Coloquen correctamente el punto decimal en el resultado.

$$\begin{array}{r} 4.5 \\ \times\ 2.1 \\ \hline 4\ 5 \\ 9\ 0\ \ \\ \hline 9\ 4\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.23 \\ \times\ 4.7 \\ \hline 8\ 6\ 1 \\ 4\ 9\ 2\ \ \\ \hline 5\ 7\ 8\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.56 \\ \times\ 0.98 \\ \hline 3\ 6\ 4\ 8 \\ 4\ 1\ 0\ 4\ \ \\ \hline 4\ 4\ 6\ 8\ 8 \end{array}$$

Analicen las operaciones y escriban una regla para la multiplicación de números con punto decimal.

VI. Resuelvan la multiplicación del problema inicial (0.48 × 0.6) con la regla que escribieron y comprueben si llegaron al mismo resultado que cuando la resolvieron con el cuadrado.

VIII. Realiza en tu cuaderno las siguientes multiplicaciones.

123. 45 × 4.8   3.23 × 1.3   6.78 × 0.129   8.9 × 4.6

>>> A lo que llegamos

Para resolver multiplicaciones de números con punto decimal se procede igual que en las multiplicaciones de números enteros, sólo que al final se coloca el punto donde corresponde, recordando que décimos por décimos dan como resultado centésimos, centésimos por décimos resultan milésimos, etcétera.

$$
\begin{array}{r l}
4.56 & \longleftarrow \text{Primer factor (centésimos, 2 decimales)} \\
\times\ 3.7 & \longleftarrow \text{Segundo factor (décimos, 1 decimal)} \\
\hline
3\,1\,9\,2 & \\
1\,3\,6\,8 & \\
\hline
1\,6.8\,7\,2 & \longleftarrow \text{Resultado (milésimos, } 2 + 1 = 3 \text{ decimales)}
\end{array}
$$

Una manera sencilla de saber dónde colocar el punto decimal es sumando el número de cifras que hay a la derecha del punto decimal en el primer factor y en el segundo factor, y en el resultado poner esa cantidad de cifras decimales.

Por ejemplo, en la multiplicación anterior hay 3 cifras después del punto (2 en el primer factor y 1 en el segundo factor), por ello en el resultado se dejan 3 cifras después del punto.

Cuando hagan falta lugares para poner el punto en el lugar adecuado se completa la cantidad con ceros. Por ejemplo:

$$0.08 \times 0.4 = 0.032$$

¿EN DÓNDE SE USA LA MULTIPLICACIÓN DE DECIMALES?

>>> Lo que aprendimos

1. La información de vitaminas de un cereal para niños indica:

La expresión µg se lee "microgramos" y es la milésima parte de un miligramo.

VITAMINAS	CANTIDAD EN UNA PORCIÓN DE 30 g
Vitamina A	151.50 µg
Vitamina C	60.6 mg
Vitamina B1	0.38 mg
Vitamina B2	0.43 mg
Niacina	5.05 mg
Vitamina B6	0.51 mg
Vitamina B12	0.51 µg

a) ¿Qué cantidad de vitamina B1 se consume con 3 porciones de 30 g de ese cereal?

____

b) ¿Qué cantidad de vitamina C se consume con 100 g de ese cereal?

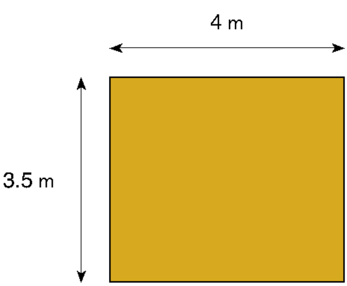
____

c) Una porción de ese cereal aporta el 25% de la vitamina B12 que se debe consumir diariamente, ¿qué cantidad de vitamina B12 se debe consumir en un día?

____

d) Medio vaso de leche aporta 75 µg de vitamina A. Si una persona desayuna y cena una porción de cereal con medio vaso de leche, ¿qué cantidad de vitamina A le aportan estos alimentos? _______________

2. Luisa quiere cubrir el piso de su recámara con losetas. Las dimensiones del piso son 4 m de largo por 3.5 m de ancho.



a) ¿Cuántos metros cuadrados necesita comprar de loseta? _______

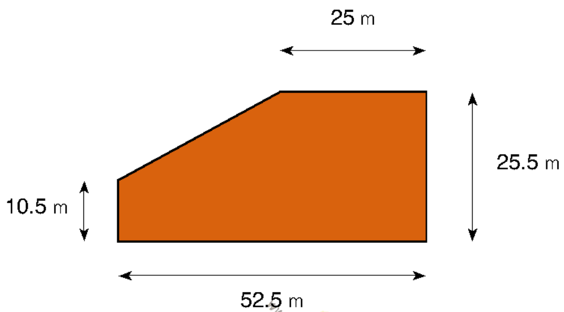
b) El metro cuadrado de la loseta que va a comprar le cuesta $135.50, ¿cuánto gastará en loseta? _______________

c) Va a necesitar 7 bultos de pegamento para loseta, cada bulto cuesta $59.90, ¿cuánto gastará en el pegamento? _______

d) La mano de obra del albañil le va a costar $70 por metro cuadrado, ¿cuánto le pagará al albañil? ____________________

e) ¿Cuánto gastará Luisa en total? ____________________

3. Don Fer va a vender un terreno que tiene la siguiente forma y dimensiones:



Si va a vender a $150 el metro cuadrado, ¿cuál es el costo del terreno? ____________

4. Contesten:

a) ¿Qué número con punto decimal multiplicado por 8 da 4? ____________

b) ¿Qué número con punto decimal multiplicado por 12 da 9? ____________

c) ¿Por cuál número con punto decimal hay que multiplicar 100 para obtener 25?

____

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados a estos problemas.

>>> Para saber más

Sobre los números decimales en la vida cotidiana consulta:
http://www.sectormatematica.cl/basica/decvida.htm
[Fecha de consulta: 16 de junio 2006].
Da clic en *"Multiplicando con decimales"* y *"Multiplicando decimales menores que 1"*.

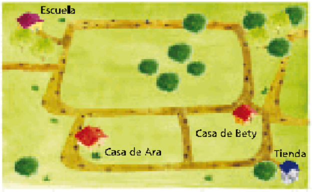
Mediatriz y bisectriz

En esta secuencia aprenderás a utilizar las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo para resolver diversos problemas geométricos.

SESIÓN 1

A LA MISMA DISTANCIA

>>> Para empezar



Éste es un croquis de una parte del pequeño pueblo donde vive Ara.

¿Quién vive más cerca de la tienda? ____________

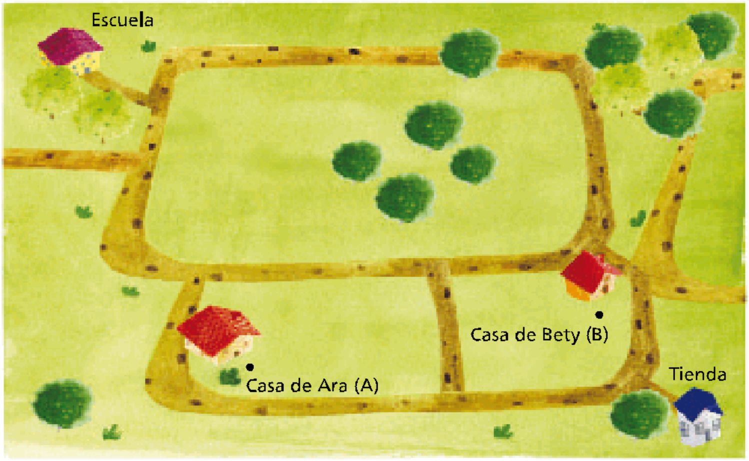
______________________, ¿y de la escuela?

____

>>> Consideremos lo siguiente

Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (A) que de la de Bety (B).

Marquen con puntos 5 lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos.



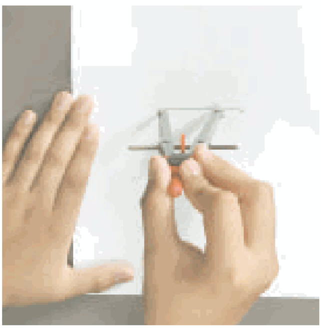
Platiquen con otros equipos: ¿Qué hicieron para localizar puntos que estuvieran a la misma distancia de la casa de Ara y de la de Bety?, anoten en el pizarrón las distintas maneras en que se resolvió el problema y vean sus semejanzas y diferencias.

>>> Manos a la obra

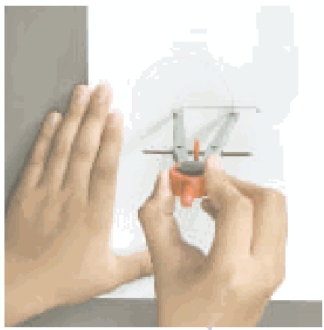
I. Considera que los siguientes puntos representan la casa de Ara (A) y la casa de Bety (B)

- En un grupo, un equipo encontró un punto que está a la misma distancia de A y de B con el siguiente procedimiento:

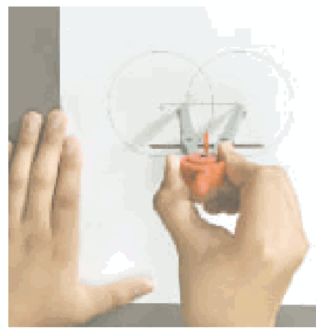
Paso 1. Se abre el compás a una medida mayor que la mitad de la distancia entre A y B



Paso 2. Se apoya el compás en A y se traza un círculo con la medida elegida en 1.



Paso 3. Luego se apoya el compás en B y se traza un círculo con el mismo radio del círculo anterior y que lo corte. Los puntos de corte están a la misma distancia de A y B.



Ese equipo dice que los puntos donde se cortan las circunferencias equidistan de A y de B.

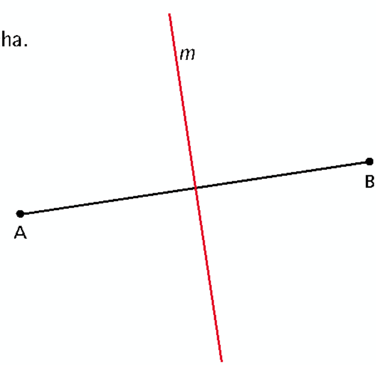
a) ¿Es correcto su procedimiento? ______________ ¿Por qué? ____________

____

b) Utiliza este método para hallar tres puntos que equidisten de A y de B.

c) Traza una recta que pase por los tres puntos que localizaste. Nombra *m* a la recta.

II. Al trazar la recta obtuviste un dibujo como el de la derecha.



a) Observa que esta recta resulta de unir algunos puntos que equidistan de A y de B. ¿Los demás puntos de la recta también equidistan de A y de B?

b) En este dibujo localiza 3 puntos diferentes en la recta *m*.

c) Nombra R, S y T a los puntos que localizaste. Completa la tabla de la siguiente página.

Distancia de **R** a **A**		Distancia de **R** a **B**	
Distancia de **S** a **A**		Distancia de **S** a **B**	
Distancia de **T** a **A**		Distancia de **T** a **B**	

d) ¿Son iguales o diferentes? ______________________

Comparen y comenten sus respuestas hasta este punto. Lean con atención la siguiente información y encuentren y comenten las respuestas a los incisos desde e) hasta h).

El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forman una recta que recibe el nombre de mediatriz del segmento.

Si un punto equidista de los extremos del segmento, entonces pertenece a la mediatriz del segmento.

e) ¿La mediatriz de un segmento pasa por el punto medio del segmento? __________

f) ¿Cuánto mide el ángulo que forman la mediatriz y el segmento? __________

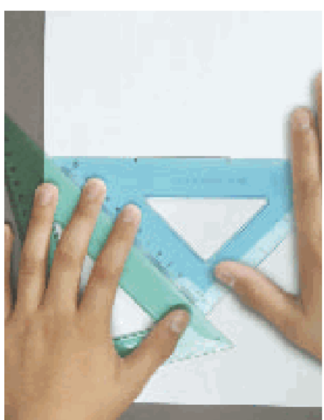
g) ¿La mediatriz de un segmento es el eje de simetría del segmento? __________

h) ¿Por qué? ______________________

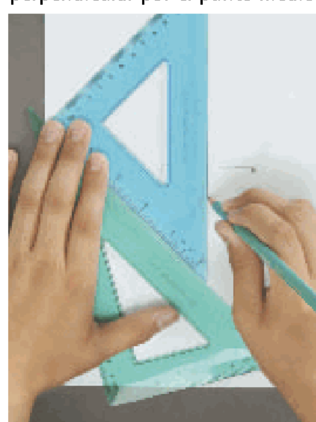
III. Para trazar la mediatriz de un segmento se traza la perpendicular en el punto medio del segmento.

Paso 1. Dado el segmento $\overline{PQ}$, se localiza el punto medio (usa tu regla para medir).

Paso 2. Se colocan las escuadras como se muestra, primero se debe colocar la escuadra azul.

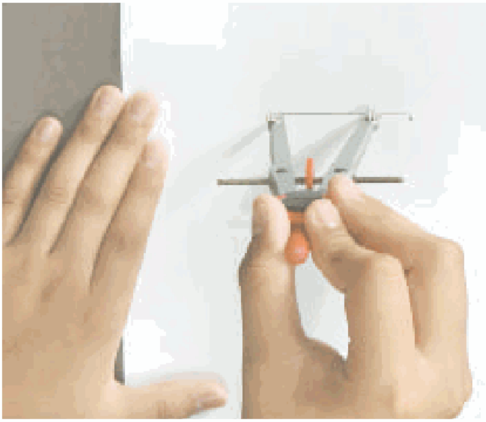


Paso 3. Se gira la escuadra azul sin mover la verde y se traza la perpendicular por el punto medio.

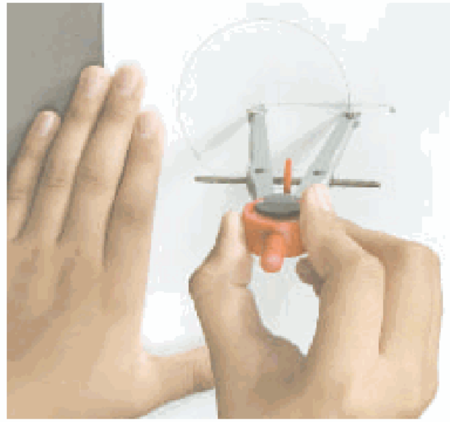


Otra manera de trazar la mediatriz de un segmento es la siguiente:

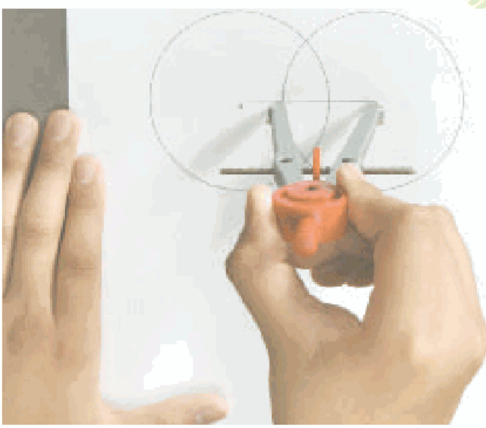
Paso 1. Se apoya el compás sobre un extremo del segmento y se abre a una distancia mayor que la mitad del segmento.



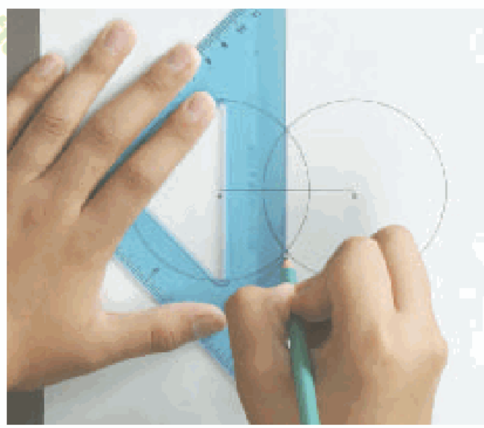
Paso 2. Se traza un círculo.



Paso 3. Se apoya el compás en el otro extremo del segmento y se traza otro círculo con el mismo radio que el anterior.



Paso 4. Se unen los puntos de corte de los círculos y se obtiene la mediatriz.



IV. Traza dos segmentos en tu cuaderno; a cada uno trázale su mediatriz.

V. Regresa al problema inicial (el de las casas de Ara y Bety) y haz lo siguiente:

a) Traza el segmento que va de la casa de Ara a la de Bety.

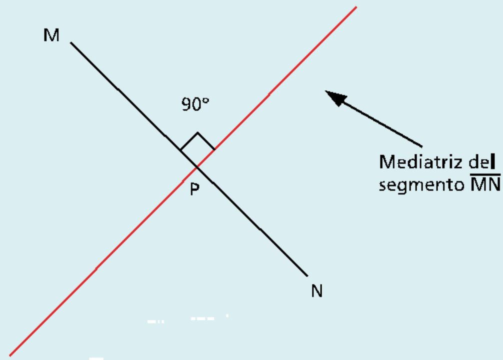
b) Traza la mediatriz de ese segmento.

c) Si habías localizado bien los cinco puntos en los que podría estar la casa de Carlos, todos estarán sobre la mediatriz.

>>> A lo que llegamos

La **mediatriz** de un segmento es:

1. El conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento.
2. La perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.
3. El eje de simetría del segmento.



$\overline{MP} = \overline{PN}$, P es el punto medio del segmento $\overline{MN}$.

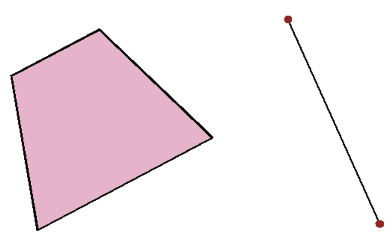
SESIÓN 2

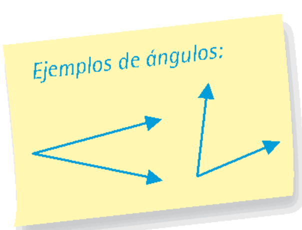
UN PROBLEMA GEOMÉTRICO

>>> Para empezar

Tú ya has trabajado con ejes de simetría de figuras y de segmentos.

Traza el eje de simetría del siguiente trapecio y el del segmento:

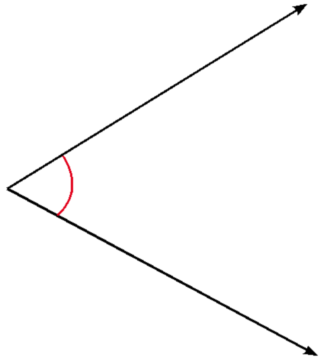




¿Crees que los ángulos también tienen eje de simetría?

>>> Consideremos lo siguiente

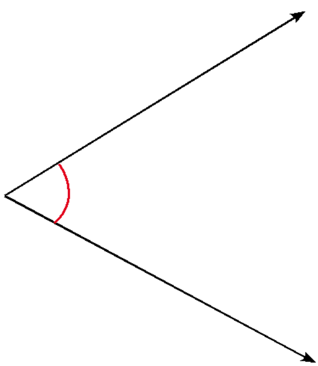
¿De qué manera podrían trazar lo más exactamente posible el eje de simetría del siguiente ángulo? Elaboren un plan y tracen el eje de simetría utilizando sus instrumentos geométricos.



Platiquen a su grupo la estrategia que utilizaron para trazar el eje de simetría del ángulo, busquen la manera de validar los procedimientos: ¿cómo pueden estar seguros de que en realidad trazaron el eje de simetría?

>>> Manos a la obra

I. El siguiente ángulo es igual al anterior.



Recuerda que:
Para medir un ángulo se usa el transportador.

a) ¿Cuánto mide el ángulo? ____________________

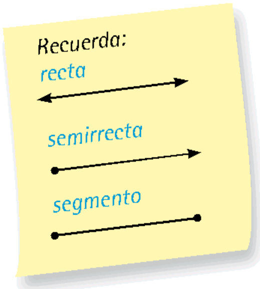
b) Divide con una semirrecta el ángulo marcado con el arco rojo en dos ángulos de la misma medida; la semirrecta debe iniciar en el vértice del ángulo. Nómbrala *b*.

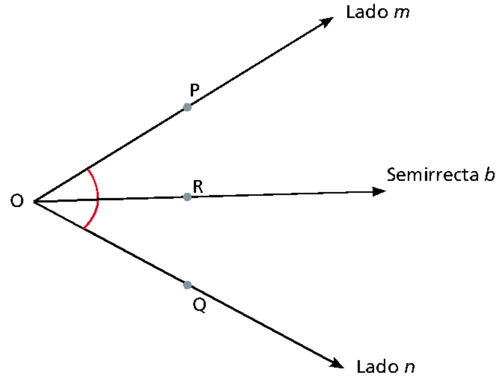
c) ¿Cuánto mide cada uno de los dos ángulos resultantes? ____________________

d) ¿La semirrecta *b* es eje de simetría del ángulo inicial? ____________________

¿Por qué? ____________________

II. Si hiciste bien los trazos anteriores debes haber obtenido una figura como la siguiente:



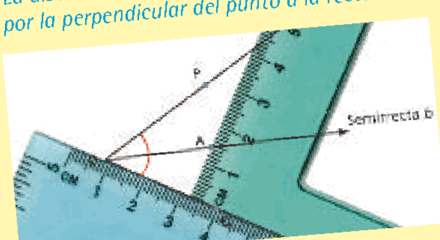


La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo POQ y determina el ángulo POR igual al ángulo ROQ recibe el nombre de bisectriz.

- Localiza 5 puntos diferentes en la bisectriz.
- Nombra A, B, C, D y E a los puntos que localizaste.
- Mide la distancia de cada punto a los lados del ángulo.

Distancia de **A** al lado *m*		Distancia de **A** al lado *n*	
Distancia de **B** al lado *m*		Distancia de **B** al lado *n*	
Distancia de **C** al lado *m*		Distancia de **C** al lado *n*	
Distancia de **D** al lado *m*		Distancia de **D** al lado *n*	
Distancia de **E** al lado *m*		Distancia de **E** al lado *n*	

Recuerda que:
La distancia de un punto a una recta se mide por la perpendicular del punto a la recta.



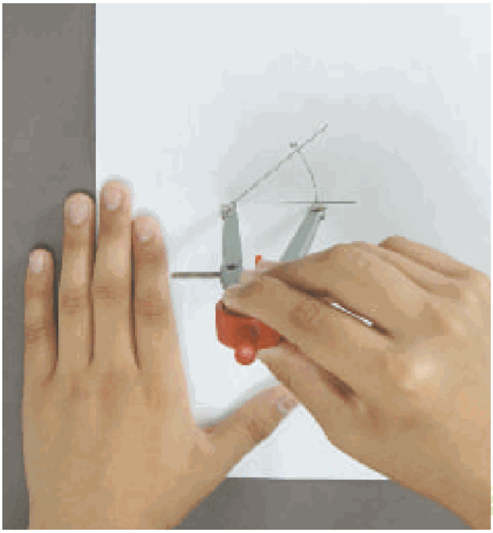
- Analiza los resultados de cada renglón de la tabla.

a) ¿Cómo son las distancias de los puntos de la bisectriz a los lados del ángulo?

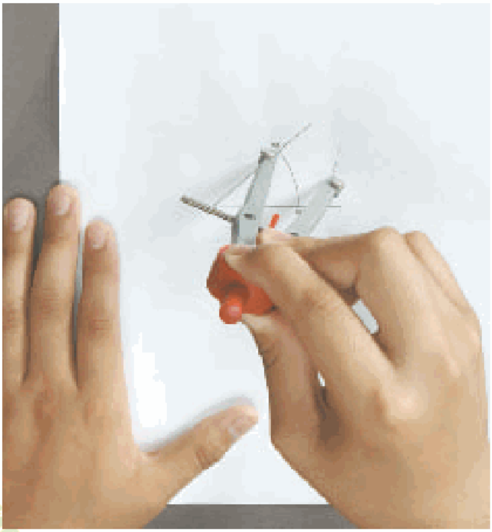
b) ¿Pasará lo mismo con otros puntos de la bisectriz?, escoge otros dos puntos y comprueba si equidistan de los lados del ángulo.

III. En la actividad I trazaste la bisectriz de un ángulo al dividir en dos partes iguales el ángulo. Ahora lee con atención este otro procedimiento para trazar la bisectriz de un ángulo.

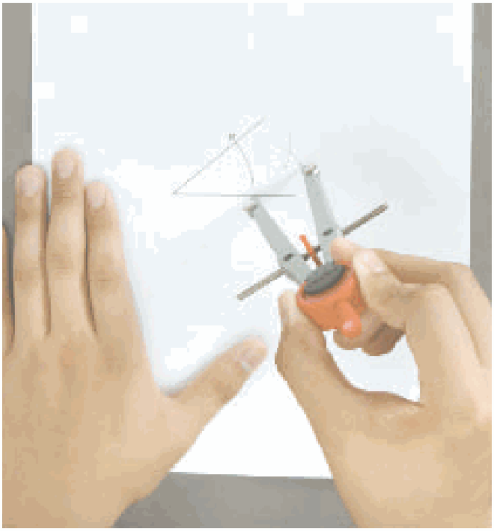
Paso 1. Se apoya el compás en el vértice del ángulo y se traza un arco que corte a los dos lados del ángulo. Llama M y N a los puntos de corte.



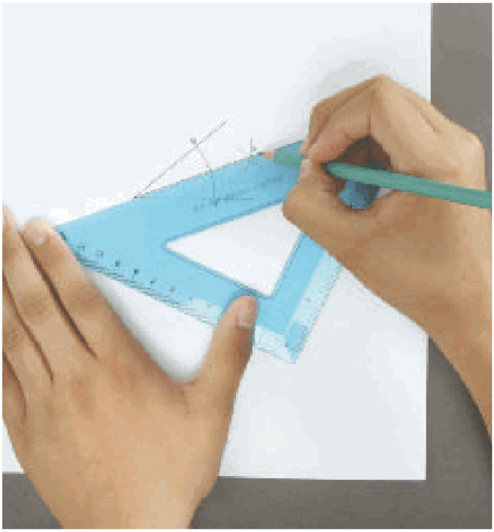
Paso 2. Se apoya el compás en M y se traza un arco suficientemente grande.



Paso 3. Se apoya el compás en N y con la misma abertura se traza otro arco que corte el anterior. Llamamos P al punto de corte.



Paso 4. Se une el vértice del ángulo con P y se obtiene la bisectriz del ángulo.



IV. Traza dos ángulos en tu cuaderno. A cada ángulo trázale su bisectriz.

V. Regresa al problema inicial del trazo del eje de simetría del ángulo y haz lo siguiente:

a) Con el procedimiento descrito en la actividad III traza la bisectriz del ángulo del problema inicial.

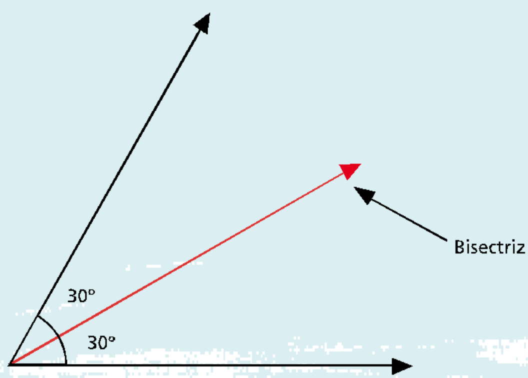
b) Si trazaste bien el eje de simetría, éste y la bisectriz deben coincidir en todos sus puntos.

Recapitulen en grupo lo que han estudiado hasta este momento y lean con atención la siguiente información.

>>> A lo que llegamos

La **bisectriz** de un ángulo es:

1. La semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y determina dos ángulos iguales.
2. El eje de simetría del ángulo.
3. El conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo.



Mitades de ángulos

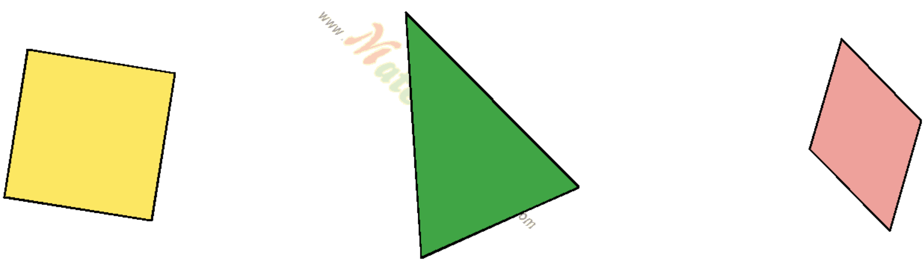
Ahora ya conoces dos palabras muy importantes en matemáticas: mediatriz y bisectriz. No sólo sabes lo que son sino que también sabes trazarlas utilizando tus instrumentos geométricos.

APLIQUEMOS NUESTROS CONOCIMIENTOS DE MEDIATRICES Y BISECTRICES

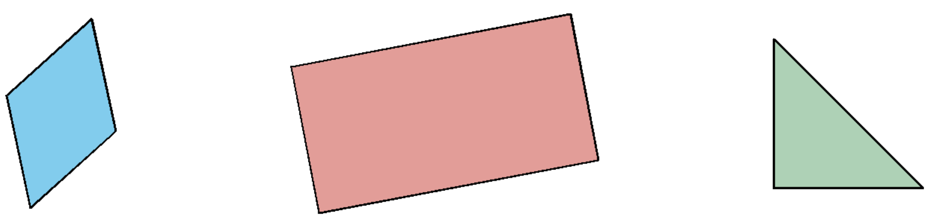
>>> Lo que aprendimos

1. Traza el eje de simetría para que el punto P sea simétrico al punto Q.

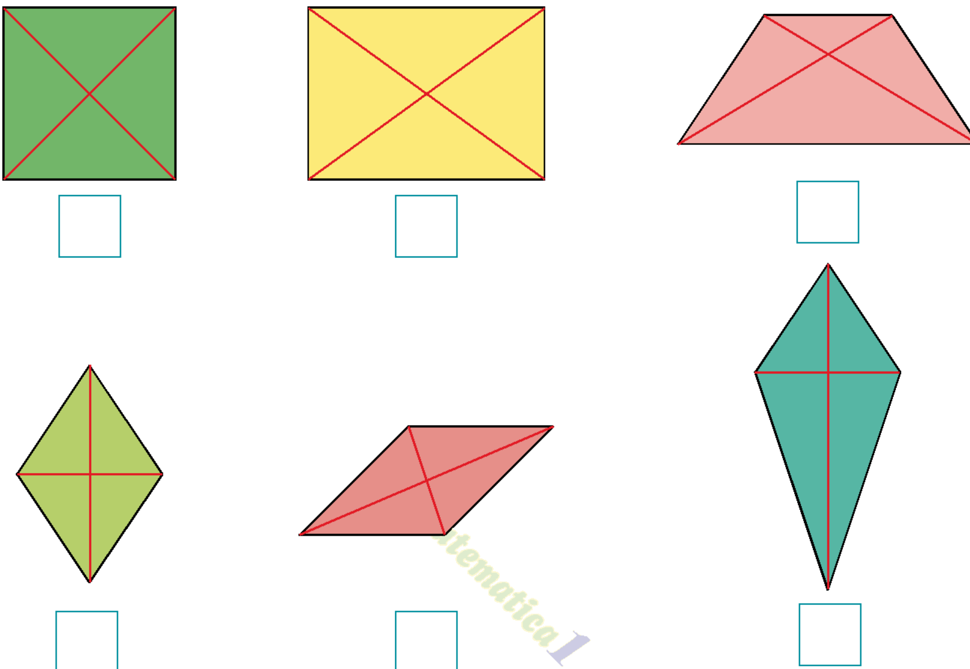
2. Traza los ejes de simetría de cada figura. Marca con rojo los que, además de ser ejes de simetría, también sean mediatrices de algún lado de la figura.



3. Traza el o los ejes de simetría de cada figura. Remarca con rojo el que, además de ser eje de simetría, también es bisectriz de algún ángulo de la figura.



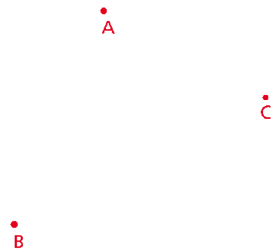
4. En los siguientes cuadriláteros se han trazado con rojo las diagonales. Marca con una palomita aquellos cuadriláteros en los que al menos una diagonal es mediatriz de la otra diagonal.



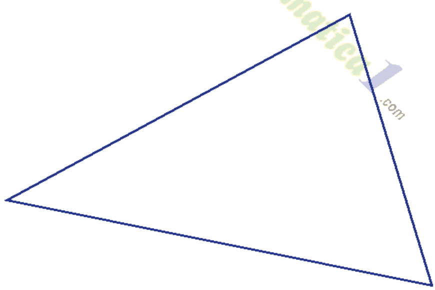
5. Traza un segmento. Después traza un cuadrado de manera que el segmento sea una de sus diagonales.

6. Los puntos A, B y C representan la ubicación de tres poblados diferentes. Se desea construir un centro de salud que esté a la misma distancia de los tres poblados. Localiza un punto D que represente el centro de salud.

Pista: recuerda que cualquier punto de la mediatriz de un segmento está a la misma distancia de los dos extremos del segmento.



7. Encuentra un punto que esté a la misma distancia de los tres lados del siguiente triángulo.



Hagan una puesta en común grupal y comparen los procedimientos y resultados de estos problemas; argumenten sus respuestas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Construcciones básicas" y "Paralelas con doblado de papel" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Polígonos regulares

En esta secuencia aprenderás a construir polígonos regulares a partir de distintas informaciones.

SESIÓN 1

TARJETAS DE FELICITACIÓN

Recuerda que:

Los polígonos regulares son los que tienen todos sus lados y sus ángulos iguales.

>>> Para empezar

Dar y recibir tarjetas es una experiencia agradable, y si están hechas por uno mismo es aún mejor. Observa que en estos diseños hay figuras geométricas.

¿Cuál de las tarjetas está hecha en un polígono regular?

____

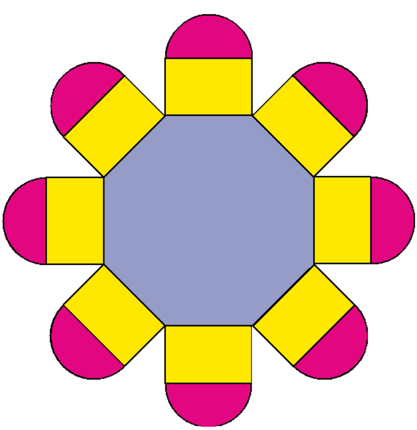
____

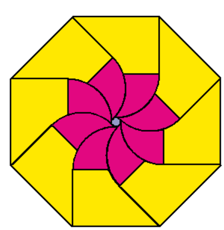
Felicidades

Los polígonos regulares se usan en muchos de los objetos que usamos en la vida cotidiana, tales como tarjetas de felicitación, mosaicos, cajas, edificios, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

Hagan un plan para que cada quién trace la figura de la izquierda para una tarjeta. Pueden hacerla de cualquier tamaño siempre y cuando sea mayor que la del libro. Cuando terminen, decórenla, escriban algo en ella, ciérrenla como se muestra y obséquienla.



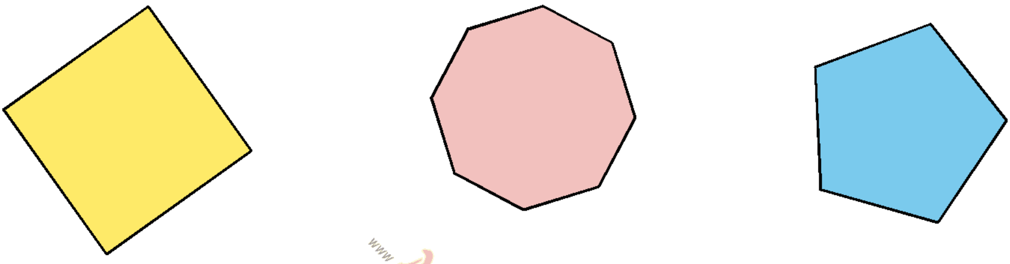


Platiquen con sus compañeros el procedimiento que siguieron para trazar su tarjeta, en particular mencionen:

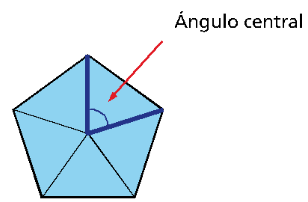
- Qué fue lo que hicieron para que el octágono fuera regular, es decir para que tuviera todos sus lados y sus ángulos iguales.

>>> Manos a la obra

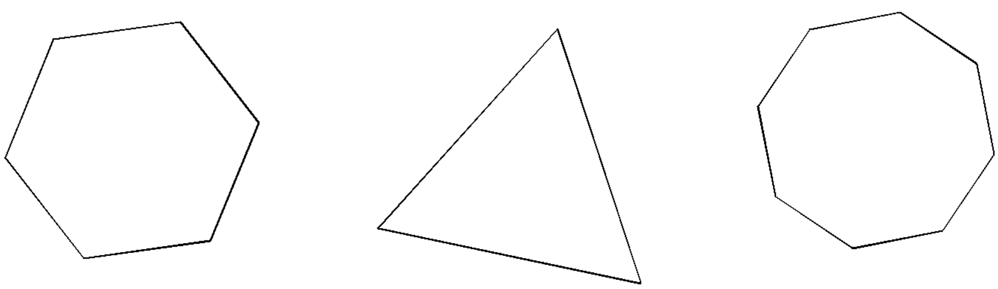
I. Al trazar dos ejes de simetría en un polígono regular, el punto donde se cortan es el centro del polígono. Hallen el centro de los siguientes polígonos regulares.



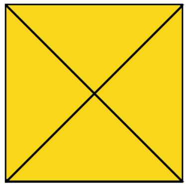
II. Los ángulos centrales de un polígono son los que tienen su vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos del polígono. En el pentágono de la derecha se han marcado sus ángulos centrales.



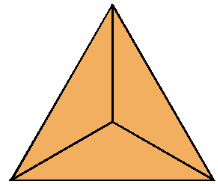
Tracen los ángulos centrales de los siguientes polígonos regulares.



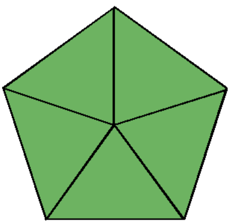
III. En los siguientes polígonos regulares se han marcado sus ángulos centrales. Midan y anoten la medida correspondiente en cada uno.



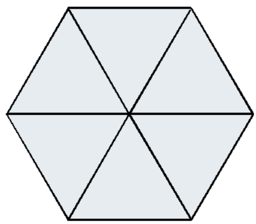
Cuadrado



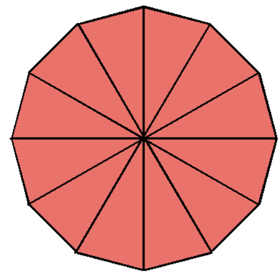
Triángulo equilátero



Pentágono



Hexágono



Dodecágono

IV. Con los datos que hallaron completen la siguiente tabla:

Nombre del polígono	Número de lados	Número de ángulos centrales	Medida de cada ángulo central	Resultado de multiplicar el número de lados por la medida del ángulo central
Cuadrado	4	4	90°	$4 \times 90° = 360°$

V. Contesten:

a) ¿Cuál es el resultado de multiplicar el número de lados de un polígono regular por la medida de su ángulo central? ____________________

b) El número de lados de un polígono regular es 10, ¿cuál es la medida de su ángulo central? ____________________

c) La medida del ángulo central de un polígono regular es 40°, ¿cuántos lados tiene ese polígono? ____________________

d) ¿Qué polígono regular tiene un ángulo central de 90°? ____________________

Comenten con su grupo las respuestas a las preguntas de la actividad V. Si no coinciden analicen por qué.

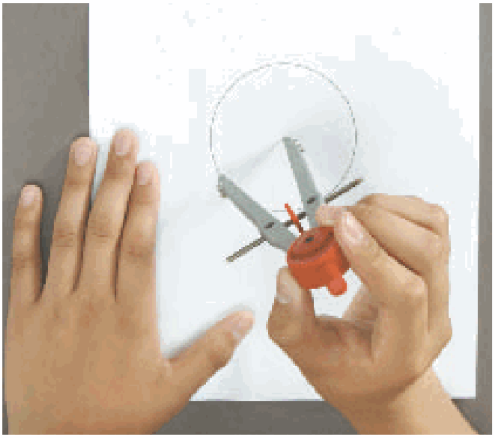
VI. Los ángulos centrales son útiles para trazar algunos polígonos regulares. Estudien con atención los pasos para trazar un pentágono regular.

Paso 1. Se calcula la medida del ángulo central del pentágono.

$$\begin{array}{r|l} & 72 \\ \hline 5 & 360 \\ & \ \ 10 \\ & \ \ \ \ 0 \end{array}$$

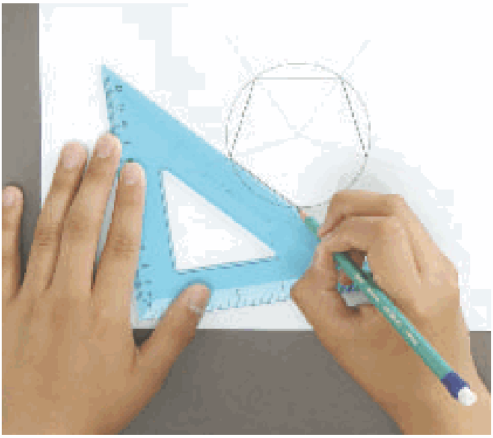
360 grados entre 5 son 72°.

Paso 2. Se traza una circunferencia.



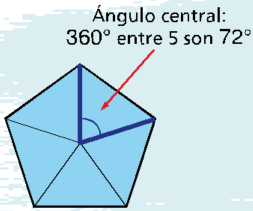
Paso 3. Con ayuda del transportador se marcan en esa circunferencia ángulos centrales de 72°; observen que la circunferencia queda dividida en 5 partes iguales.

Paso 4. Se unen las marcas consecutivas de división de la circunferencia y ya se tiene el pentágono regular.



VII. Utilizando el procedimiento de la actividad VI, traza en tu cuaderno un triángulo equilátero, un cuadrado, un nonágono o eneágono regular (9 lados), un decágono regular (10 lados) y un dodecágono regular (12 lados).

>>> A lo que llegamos



La medida del ángulo central de un polígono regular se calcula dividiendo 360° entre el número de lados del polígono.

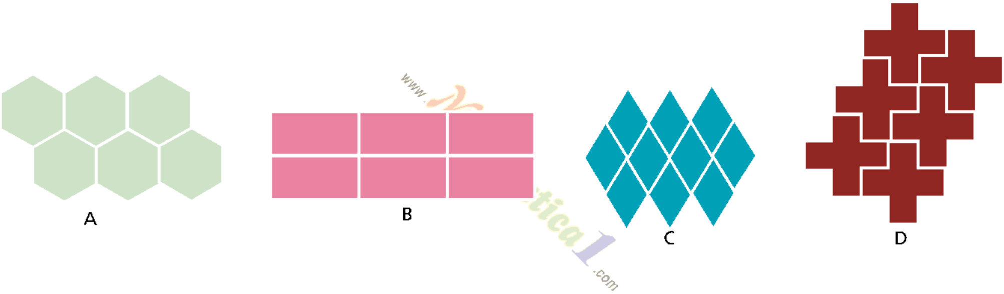
Esta medida es útil para trazar polígonos regulares a partir de una circunferencia, como se mostró en la actividad VI.

SESIÓN 2

MOSAICOS

>>> Para empezar

Las figuras geométricas están en muchos de los objetos de nuestro entorno, y para muestra basta un botón. Observa estos mosaicos y azulejos:

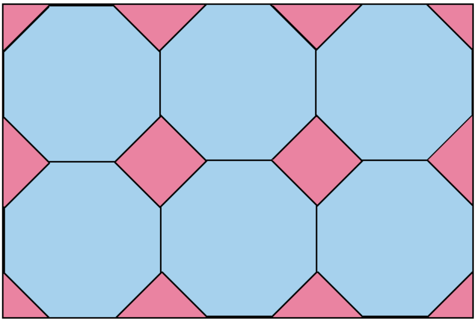


¿En cuál de los mosaicos hay polígonos regulares? ______

¿Cuáles son esos polígonos regulares? ______

>>> Consideremos lo siguiente

Hagan un plan para reproducir en su cuaderno el siguiente arreglo de mosaicos, sabiendo que el lado del octágono regular debe medir 3 cm, y luego trácenlo.



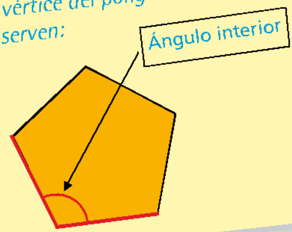
Comenten con sus compañeros el procedimiento que siguieron para trazar el mosaico, además,

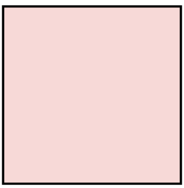
- Mencionen cómo trazaron el octágono regular.
- Anoten en el pizarrón los diferentes procedimientos que siguieron.

>>> Manos a la obra

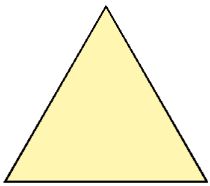
I. Midan y anoten la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos regulares:

El ángulo interior de un polígono está dentro del polígono, sus lados son dos lados consecutivos del polígono y su vértice es un vértice del polígono. Observen:

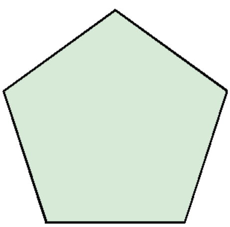




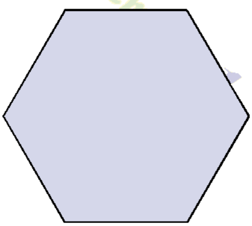
Cuadrado



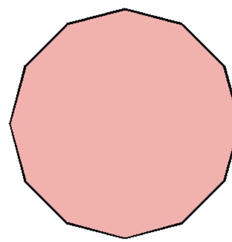
Triángulo equilátero



Pentágono



Hexágono



Dodecágono

II. Con los datos que hallaron completen la tabla. Recuerden que la medida del ángulo central la determinaron en la lección anterior.

Nombre del polígono regular	Medida de cada ángulo interior	Medida de cada ángulo central	Resultado de sumar el ángulo interior y el ángulo central
Cuadrado	90°	90°	90° + 90° = 180°
Pentágono	108°	72°	

III. Contesten:

a) ¿Cuál es el resultado de sumar el ángulo interior y el ángulo central de un polígono regular? ____________________

Si dos ángulos suman 180° se dice que cada uno es el suplemento del otro. Por ejemplo, el suplemento de un ángulo de 30° es un ángulo de 150°.

Los ángulos interior y central de un polígono regular son suplementarios.

b) La medida del ángulo interior de un polígono regular es 140°, ¿cuántos lados tiene ese polígono? ____________________

c) ¿Cuánto mide el ángulo interior de un decágono regular? ____________________

¿Y el de un dodecágono regular? ____________________

Hagan una confrontación de las respuestas de la actividad anterior.

IV. Los ángulos interiores son útiles para trazar algunos polígonos regulares, sobre todo cuando la medida del lado del polígono está determinada. Estudien con atención los pasos para trazar un pentágono regular de 2 cm de lado.

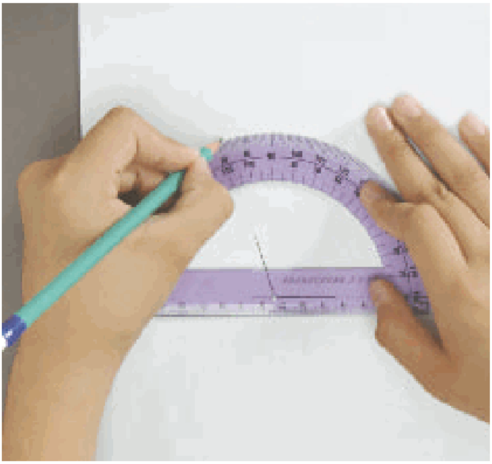
Paso 1. Se calcula la medida del ángulo interor del pentágono.

360° entre 5 es 72°.

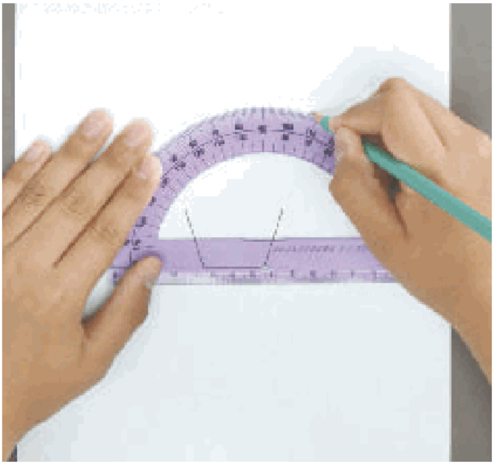
Como el ángulo interior es el suplemento del ángulo central,

180° − 72° = 108°.

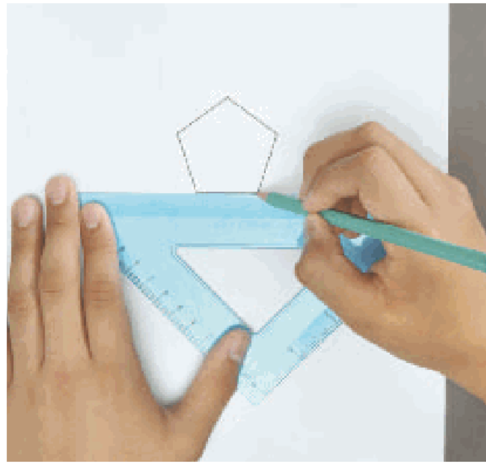
Paso 2. Se traza un ángulo de 108° cuyos lados midan 2 cm cada uno.



Paso 3. En cada extremo del segmento nuevamente se traza un ángulo de 108° cuyos lados midan 2 cm.



Paso 4. Se continúa así hasta completar el pentágono regular.



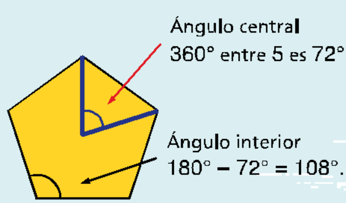
- ¿Algún equipo del grupo utilizó este procedimiento para trazar el octágono regular del mosaico?

V. Utiliza el procedimiento de la actividad IV para trazar en tu cuaderno los siguientes polígonos regulares:

Polígono regular	Medida del lado
Triángulo equilátero	6 cm
Cuadrado	8 cm
Hexágono	3 cm
Decágono	2 cm

>>> A lo que llegamos

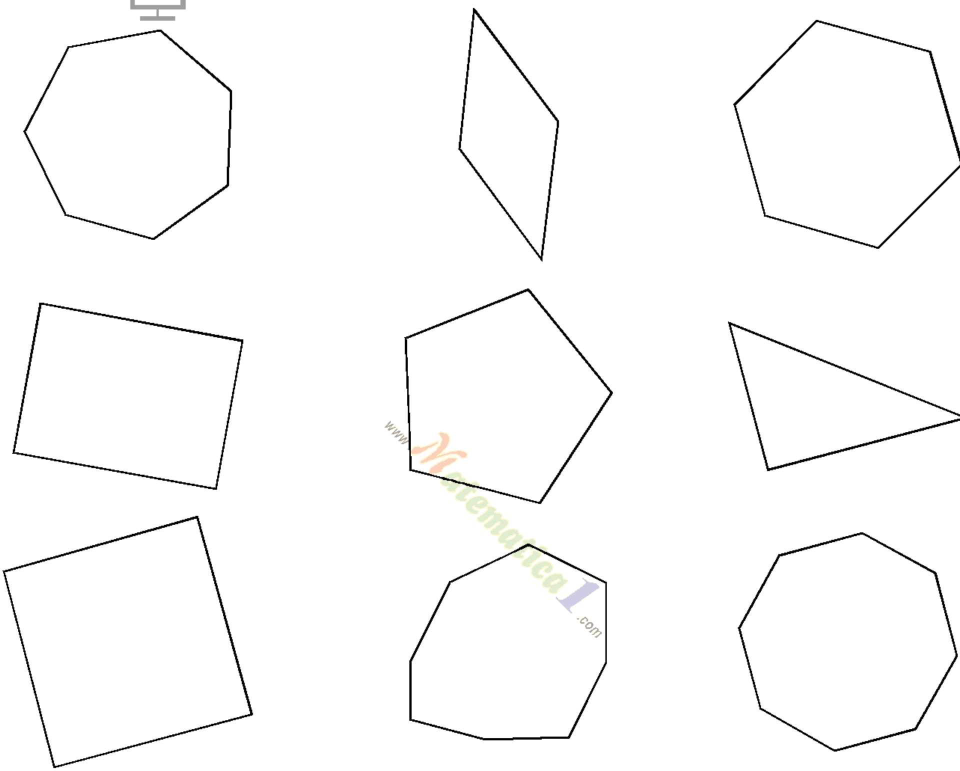
Conociendo la medida del ángulo interior es posible trazar polígonos regulares cuyos lados tengan una medida determinada. Una manera de calcular el ángulo interior de un polígono regular es buscando el suplemento del ángulo central.



MÁS SOBRE POLÍGONOS REGULARES

>>> Lo que aprendimos

1. Tracen todos los ejes de simetría de cada figura. Coloreen sólo los polígonos regulares.



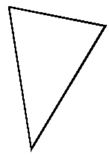
2. Consideren los polígonos regulares del punto anterior y completen la tabla.

Polígono regular	Número de lados	Número de ejes de simetría

3. Tracen en su cuaderno un polígono cuyo número de lados sea diferente al número de sus ejes de simetría.

4. Tracen en su cuaderno un polígono que tenga el mismo número de lados que de ejes de simetría.

5. El siguiente es uno de los triángulos isósceles que se formaron en un polígono regular al trazar sus ángulos centrales. Completen el trazo del polígono regular.



6. En cada uno de los siguientes incisos, anoten el nombre de un polígono que cumpla con la condición pedida; algunas preguntas tienen varias respuestas.

a) Tiene 3 lados y 3 ángulos de 60°. ______________________

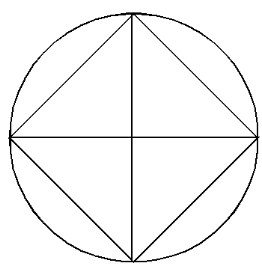
b) Todos sus ángulos interiores miden 90°. ______________________

c) Tiene 4 lados iguales. ______________________

d) Polígono regular en el que todos sus ejes de simetría son bisectrices de sus ángulos interiores. ______________________

e) Polígono regular en el que algunos de sus ejes de simetría son mediatrices de sus lados. ______________________

7. En su cuaderno reproduzcan la siguiente figura sin usar transportador, únicamente regla y compás.



8. Traza un octágono regular en la figura del ejercicio 7.

Comenten en grupo sus procedimientos y resultados a estos problemas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Nombre de los polígonos", "La miel de los hexágonos", "Recubrimientos", "Los reflejos del caleidoscopio" y "Construcción de un caleidoscopio" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Fórmulas para calcular el área de polígonos

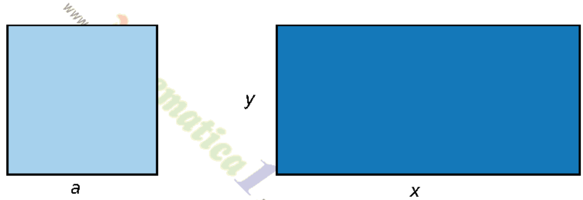
En esta secuencia continuarás con el estudio de los perímetros y las áreas al justificar las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.

SESIÓN 1

ROMPECABEZAS 1

>>> Para empezar

En la secuencia 4 repasaste la manera en que se calcula el área de varias figuras, entre ellas la del cuadrado y la del rectángulo.

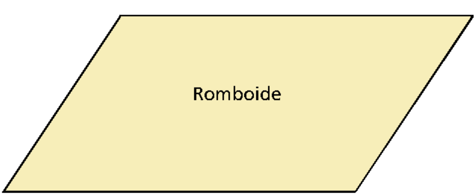


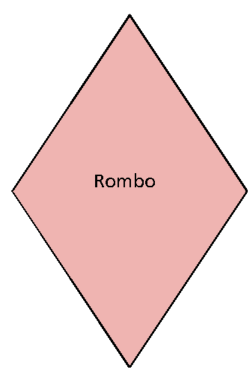
¿Cómo calculas el área del cuadrado? ____________________________________

¿Cómo calculas el área del rectángulo? ____________________________________

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de cada una de las siguientes figuras.





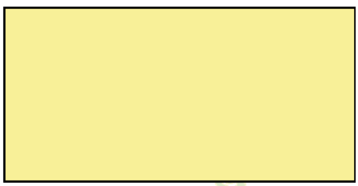
Platiquen a sus compañeros de grupo la manera en que calcularon el área. Comenten:

- ¿Qué medidas fue necesario tomar en cada figura?
- ¿Cómo utilizaron estas medidas en el cálculo del área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

>>> Manos a la obra

I. Cada uno trace en una hoja un romboide cuya base mida 6 cm y su altura 3 cm. Recórtenlo. No importa la medida de los ángulos.

a) Piensen cómo deben recortar el romboide en dos piezas para que con ellas puedan armar un rectángulo como el que se muestra. Recorten y peguen las piezas encima del rectángulo.



b) ¿Cómo son entre sí las medidas de la base del rectángulo y del romboide? ____________

____

c) ¿Cómo son entre sí las medidas de la altura del rectángulo y del romboide? ____________

____

d) ¿Cómo son entre sí las áreas del romboide y del rectángulo? ____________

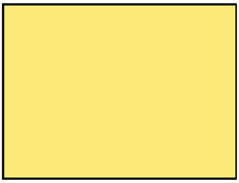
____

e) Completen la siguiente tabla:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Rectángulo				
Romboide				

II. Cada uno trace en una hoja un rombo cuyas diagonales midan 6 cm y 4 cm. Recórtenlo.

a) Piensen en una manera de recortar el rombo en triángulos para que con ellos puedan armar el siguiente rectángulo. Recorten y peguen las piezas encima del rectángulo.



b) ¿Qué relación encuentran entre la base del rectángulo y la medida de la diagonal menor del rombo? ______________________________

Observen que la altura del rectángulo mide la mitad de la diagonal mayor del rombo.

c) ¿Cómo son entre sí las áreas del rombo y del rectángulo? ______________

d) Completen las tablas.

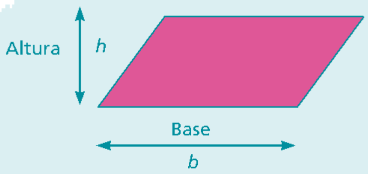
Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Rectángulo				

Figura	Medida de la diagonal menor	Medida de la diagonal mayor	Área	Fórmula para calcular el área
Rombo				

Comenten con su grupo los resultados que han obtenido hasta el momento, en particular escriban en el pizarrón las fórmulas que obtuvieron para calcular el área del romboide y del rombo y compárenlas. También comenten las medidas que es necesario tomar para el cálculo de las áreas de estas figuras.

>>> A lo que llegamos

El área de un romboide se calcula multiplicando la medida de su base por la medida de su altura.

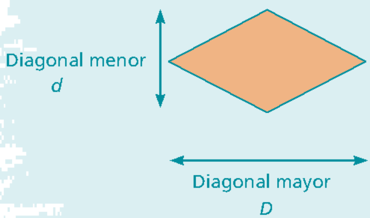


Área = base × altura

Si se denomina b a la base y h a la altura, puede escribirse:

$$A = b \times h$$

El área de un rombo se calcula multiplicando las medidas de sus diagonales y dividiendo entre 2 el resultado.



$$\text{Área} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

Si se denomina D a la diagonal mayor y d a la diagonal menor, puede escribirse:

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

No sólo es importante que conozcas estas fórmulas para calcular áreas, también es necesario que sepas cómo se obtienen y de dónde provienen. Observa que estas fórmulas sirven para cualquier caso en que conozcas o puedas medir o calcular las magnitudes indicadas.

ROMPECABEZAS 2

SESIÓN 2

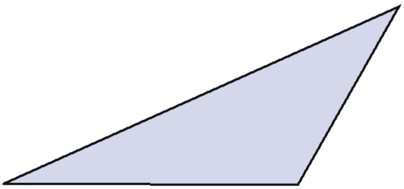
>>> Para empezar

En la primaria aprendiste a calcular el área de los triángulos. ¿Cómo se calcula el área de un triángulo? ______________________________

¿Sabes por qué se calcula así? ____________________ Si no lo sabes, en esta lección lo averiguarás.

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de las siguientes figuras.

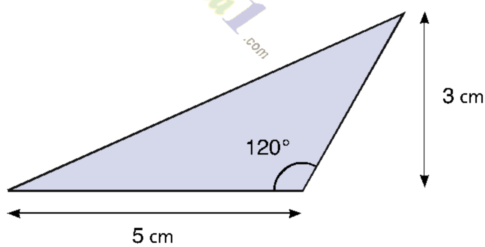


Comenten los procedimientos y resultados a los que llegaron. En particular mencionen:

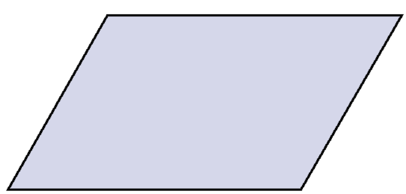
- ¿Qué medidas tomaron en cada figura?
- ¿Cómo utilizaron estas medidas para calcular el área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

>>> Manos a la obra

I. Recorten dos triángulos que midan lo que se indica en el dibujo.



a) Con los dos triángulos cubran la superficie del siguiente romboide:

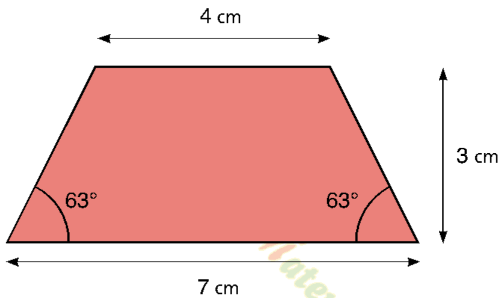


a) ¿Qué parte del área del romboide es el área del triángulo? ____________

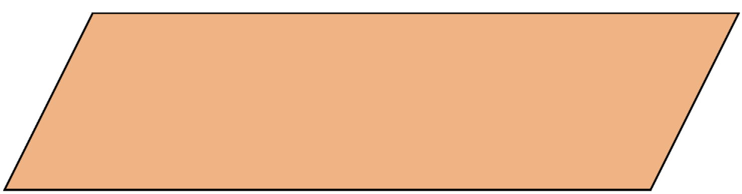
b) Completen la siguiente tabla:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Romboide azul				
Triángulo				

II. Recorten dos trapecios que tengan las medidas que se indican en la figura.



a) Acomoden los dos trapecios de manera que cubran la superficie del siguiente romboide:



b) Analicen las medidas de la base del romboide y las medidas de la base mayor y la base menor del trapecio y señalen qué relación existe entre ellas. ____________

____

c) ¿Qué parte del área del romboide es el área del trapecio? ____________

d) Escriban una regla o fórmula para calcular el área de un trapecio cuando se conocen las medidas de sus bases y su altura. ____________

e) Completen las siguientes tablas:

Figura	Medida de la base	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Romboide rosa				

Figura	Medida de la base mayor	Medida de la base menor	Medida de la altura	Área	Fórmula para calcular el área
Trapecio					

Comenten con su grupo los resultados que han obtenido hasta el momento. Escriban en el pizarrón las fórmulas que encontraron para calcular el área del triángulo y del trapecio; si las fórmulas son diferentes, compárenlas e investiguen si son equivalentes.

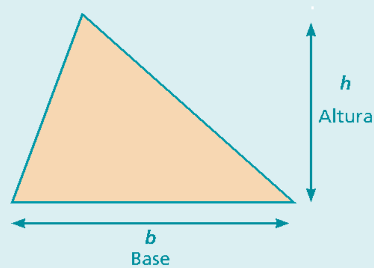
>>> A lo que llegamos

El área de un triángulo se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Si se denomina *b* a la base y *h* a la altura, puede escribirse:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

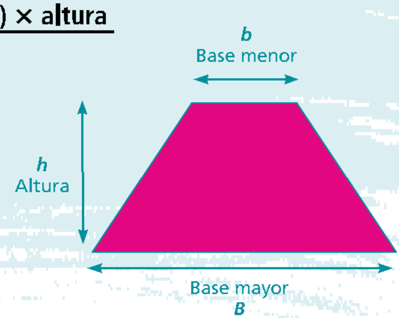


El área de un trapecio se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

Si se denomina *B* a la base mayor, *b* a la base menor y *h* a la altura, puede escribirse:

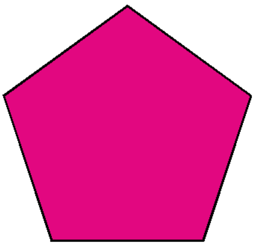
$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$



>>> Para empezar

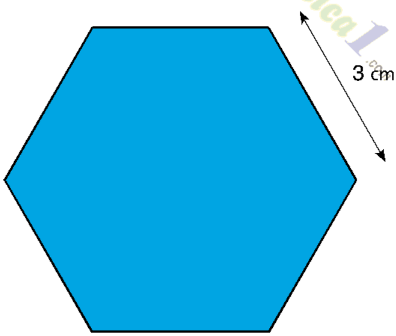
Ahora ya sabes las fórmulas para obtener el área de diversas figuras geométricas: cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, romboide y trapecio; además, sabes de dónde provienen esas fórmulas.

¿Cómo se te ocurre que puede calcularse el área de este polígono regular?



>>> Consideremos lo siguiente

Calculen el área de un hexágono regular cuyo lado mida 3 cm.



Área = ____________

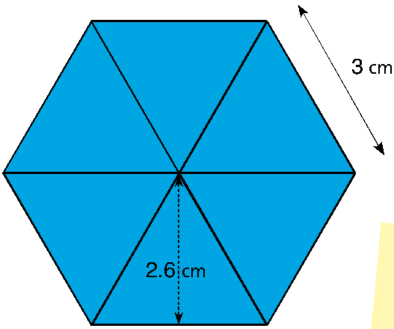
Comenten a otros equipos la manera en que resolvieron el problema. En particular mencionen:

- ¿Qué medidas tuvieron que investigar para calcular el área?
- Si usaron alguna fórmula, ¿saben cómo se obtiene dicha fórmula?

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, a un equipo se le ocurrió dividir el polígono regular en triángulos iguales para calcular el área de cada triángulo y luego sumarlas. Se dieron cuenta que requerían conocer la medida de la altura de uno de los triángulos y la midieron.

Observen que:
Los triángulos en los que se dividió el polígono regular están formados por un lado del polígono y los dos lados del ángulo central



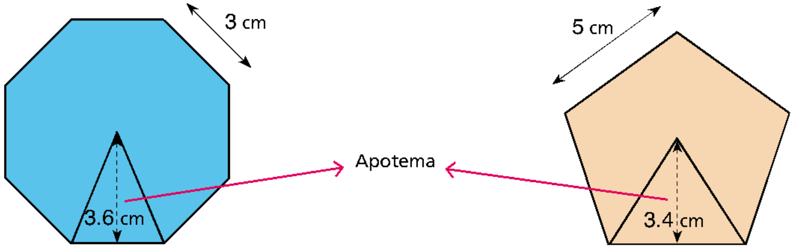
Recuerden que:
El área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo el resultado entre 2.

a) ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos en que se dividió el hexágono? ____________

b) ¿En cuántos triángulos fue dividido el hexágono? ____________

c) ¿Cuál es el área total del hexágono? ____________

II. En los polígonos regulares, la altura de los triángulos iguales en que se dividen se llama **apotema**. Completen la tabla considerando los siguientes polígonos regulares:



a) ¿En cuántos triángulos iguales se puede dividir el octágono regular? ____________

b) ¿Y el pentágono regular? ____________

c) ¿Y un decágono regular? ____________

d) ¿Y un dodecágono regular? ____________

e) ¿Y un polígono regular de 15 lados? ____________

f) ¿Y un polígono regular de n lados? ____________

Polígono	Medida de la base de un triángulo (*lado* del polígono)	Medida de la altura de un triángulo (*apotema* del polígono)	Número de triángulos	Área total del polígono
Octágono				
Pentágono				

Discutan en grupo, y con ayuda del profesor, si consideran que, con respecto a la actividad anterior, los siguientes dos procedimientos son equivalentes:

1. Calcular el área de cada triángulo y multiplicarla por el número de triángulos en que se dividió el polígono.

2. Calcular el perímetro del polígono, multiplicar el resultado por la medida del apotema y dividirlo entre 2, es decir, el área de un polígono regular es igual a:

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Recuerden que:

El perímetro de un polígono se calcula sumando la medida de todos sus lados. Si el polígono es regular, el perímetro puede calcularse multiplicando el número de lados por la medida de cada lado.

III. Subrayen las respuestas correctas. Recuerden que la medida de la **base** del triángulo es el *lado* del polígono regular y la **altura** del triángulo es el *apotema* del polígono regular.

a) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un octágono regular?

$\text{Área} = 8 \times \text{área de cada triángulo}$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{8 \times \text{lado}}{2 \times \text{apotema}}$ $\qquad$ $\text{Área} = 8 \times \dfrac{\text{lado} \times \text{apotema}}{2}$

b) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular de 13 lados?

$\text{Área} = \dfrac{13}{\text{área del triángulo}}$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{13 \times \text{lado} \times \text{apotema}}{2}$ $\qquad$ $\text{Área} = \dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$

c) ¿Cuáles son las dos fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular de *n* lados?

Área = $n \times$ área de cada triángulo

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro}}{2 \times \text{apotema}}$$

IV. Regresen al hexágono regular que mide 4 cm de lado (del problema inicial). Utilicen la fórmula $\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$ para calcular su área y comparen el resultado con el que obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

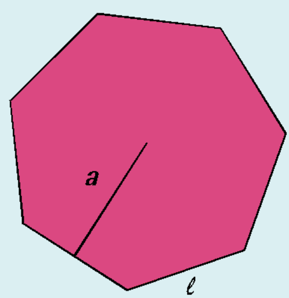
Hay varias maneras para calcular el área de un polígono regular:

1. **Si no se acuerdan de la fórmula del área, pueden dividirlo en triángulos iguales y hallarla sumando las áreas de estos triángulos.**
2. **Si aplican la fórmula: obtienen el perímetro, lo multiplican por la medida del apotema y el resultado lo dividen entre 2:**

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Si se llama *P* al perímetro y *a* al apotema puede escribirse:

$$A = \frac{P \times a}{2}$$

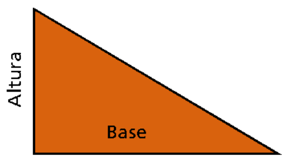


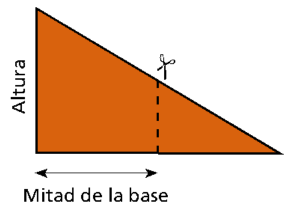
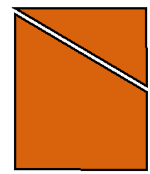
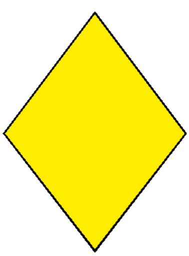
***P* es el perímetro**

Habrás notado que hay distintas maneras para calcular el área de un polígono, esto ocasiona que pueda haber distintas fórmulas; no obstante, éstas son equivalentes.

>>> Lo que aprendimos

1. En cada caso tracen y recorten la figura (puede ser de cualquier tamaño). Después hagan la transformación que se indica y a partir de esta transformación justifiquen la fórmula que se emplea para calcular el área de la figura.

<table>
<tr><th>Figura y fórmula para calcular su área</th><th>Recortar</th><th>Transformar esta figura</th></tr>
<tr><td>

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Justificación de la fórmula:</td></tr>
<tr><td>

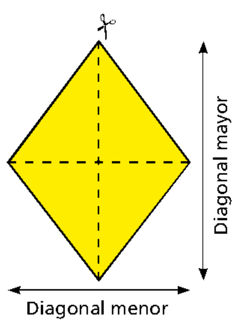
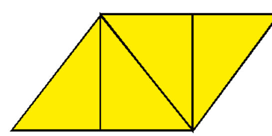
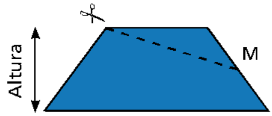
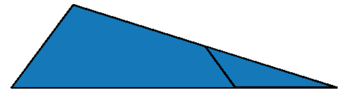
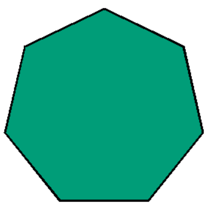
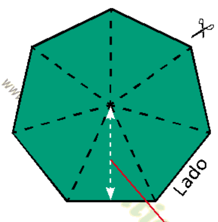
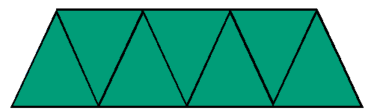
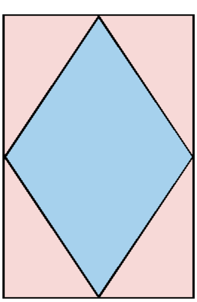
$$\text{Área} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Justificación de la fórmula:</td></tr>
</table>

Figura y fórmula para calcular su área	Recortar	Transformar a esta figura
 $\text{Área} = \frac{(\text{base mayor} \times \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$	 M es el punto medio	
Justificación de la fórmula:		
El polígono es regular  $\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$	 	
Justificación de la fórmula:		

2. Analicen la siguiente figura y, a partir de ella, expliquen la fórmula para calcular el área del rombo.



____

____

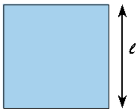
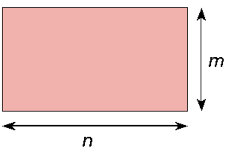
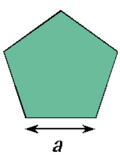
____

____

____

____

3. En la secuencia 4 aprendieron a calcular perímetros. Las fórmulas del perímetro también pueden justificarse. Analicen la figura y la fórmula y justifiquen esta última.

Figura	Fórmula para calcular el perímetro	Justificación de la fórmula
Cuadrado 	$P = 4 \times \ell$	
Rectángulo 	$P = 2 \times n + 2 \times m$	
Pentágono regular 	$P = 5 \times a$	

Comenten y comparen sus explicaciones con las de los otros equipos.

Justificación

Las fórmulas para calcular perímetros y áreas siempre tienen una justificación; es importante que te aprendas las fórmulas pero también es bueno que conozcas cómo se obtienen.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Áreas de polígonos" en *Una ventana a las formas*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

La constante de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a identificar situaciones de proporcionalidad directa en diversos contextos, y a resolverlas mediante procedimientos más eficientes.

SESIÓN 1

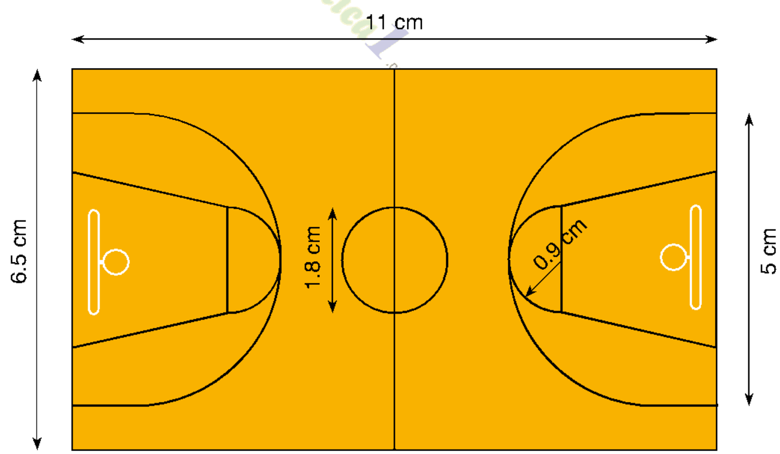
LA CANCHA DE BASQUETBOL

>>> Para empezar

Una cancha reglamentaria de basquetbol es un rectángulo con las siguientes dimensiones: de largo debe medir entre 22.5 y 28.6 metros y de ancho debe medir entre 12.8 y 15.2 metros.

>>> Consideremos lo siguiente

Veamos un dibujo a escala de una cancha de basquetbol:



La escala a la que está hecho el dibujo es 1 cm a 200 cm, es decir, 1 cm del dibujo representa 200 cm de la medida real de la cancha de basquetbol.

Completen la siguiente tabla para determinar algunas de las medidas de la cancha de basquetbol:

	Medida en el dibujo (centímetros)	Medida real (centímetros)
Largo de la cancha de basquetbol	11	2 200
Ancho de la cancha de basquetbol		1 300
Diámetro del círculo central	1.8	
Longitud de la base del área de los tiros de tres puntos		1 000
Radio del semicírculo del área de tiros libres	0.9	
Altura del piso al tablero		306

>>> Manos a la obra

I. Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Por cuál número hay que multiplicar las medidas del dibujo para obtener las medidas reales? ____________________

b) ¿Cuántas veces más grande es la medida real del largo de la cancha de basquetbol que la medida que tiene en el dibujo? ____________________

>>> A lo que llegamos

En esta situación de escala las medidas reales de la cancha de basquetbol (en cm) se pueden obtener multiplicando por 200 las medidas del dibujo (en cm).

En este problema al número 200 se le llama **factor de escala o constante de proporcionalidad** y permite encontrar las medidas reales de la cancha (en cm) multiplicando las medidas del dibujo (en cm) por 200.

II. Las medidas oficiales de un tablero de basquetbol son: largo 180 cm y ancho 105 cm.

Con la misma escala del dibujo completen la siguiente tabla para encontrar cuáles serían las medidas del tablero en el dibujo:

	Medida real (cm)	**Medida en el dibujo (cm)**
Largo del tablero	180	0.9
Ancho del tablero	106	
Largo de rectángulo inscrito en el tablero	60	
Ancho del rectángulo inscrito en el tablero	48	
Diámetro del aro o canasta	46	

a) ¿Cuál es el valor unitario que permite pasar de las medidas reales del tablero a su medida respectiva en el dibujo? ____________________

b) ¿Por cuál número hay que multiplicar las medidas reales del tablero para obtener su medida en el dibujo? ____________________

Recuerden que:
multiplicar por $\frac{1}{200}$ es lo mismo que dividir entre 200.

Comparen sus resultados, y con las medidas que encontraron dibujen el tablero en el siguiente espacio:

>>> A lo que llegamos

En este problema de escala las medidas del dibujo (en cm) se pueden obtener multiplicando por $\frac{1}{200}$ o bien dividiendo entre 200 las medidas reales (en cm). El número $\frac{1}{200}$ es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas reales de la cancha de basquetbol a las medidas del dibujo.

>>> Lo que aprendimos

Una cancha reglamentaria de voleibol es un rectángulo con las siguientes dimensiones: largo 18 metros y ancho 9 metros.

a) Si se hace un dibujo de la cancha de voleibol a escala 1 cm a 50 cm, ¿cuánto debe medir el largo de la cancha en el dibujo? ______________________

b) Completen la siguiente tabla para encontrar algunas de las medidas de una cancha reglamentaria de voleibol dibujada a escala 1 cm a 50 cm.

	Medida en el dibujo (cm)	Medida real de la cancha (cm)
Largo de la cancha de voleibol		1 800
Ancho de la cancha de voleibol	18	
Altura de la red	5	
Ancho de la red		100

c) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas reales de la cancha a las medidas del dibujo? ______________________

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas del dibujo de la cancha a las medidas reales? ______________________

e) ¿Cuántas veces más chico es el largo de la cancha en el dibujo que el largo real de la cancha? ______________________

SESIÓN 2

MAPAS Y ESCALAS

>>> Para empezar

Centro Histórico de la Ciudad de México

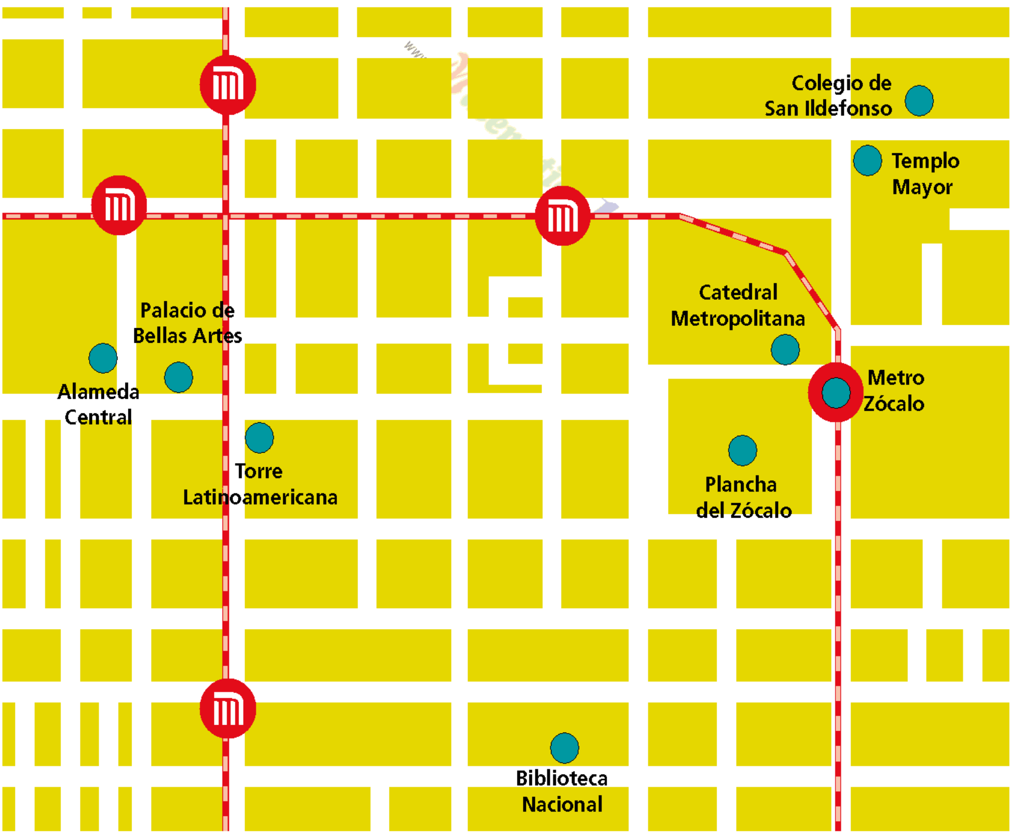
La Ciudad de México, además de ser la capital, es la ciudad más grande del país. Tiene aproximadamente 9 000 000 de habitantes, y si contaran a la gente que vive en sus alrededores ¡llega a 18 000 000! Además, la cantidad de calles, avenidas y edificios que la componen es realmente enorme. Ni los propios habitantes de la ciudad los conocen todos. Por eso es muy importante tener un mapa cuando se transita por esta ciudad.

En las siguientes actividades van a usar un mapa del centro de la Ciudad de México para ubicar algunos de los edificios más importantes y los recorridos que se pueden hacer por sus calles.

>>> Consideremos lo siguiente

Veamos un mapa del Centro Histórico de la Ciudad de México.

Fue hecho a una escala de **1** cm a **100** m, es decir, **1** cm del mapa equivale a **100** m de las medidas reales.



Completen la siguiente tabla:

	Medida en el mapa (cm)	Medida real (m)
De la **Catedral** a la **Alameda Central**	12.2	
De la estación **Zócalo** del metro a la **Biblioteca Nacional**	7.5	
De la **Torre Latinoamericana** a la **Alameda**	3	
Del **Templo Mayor** al **Colegio de San Ildefonso**	1.3	
Largo de la **plancha del Zócalo**	2.5	
Ancho de la **plancha del Zócalo**	2.2	

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten.

¿Cuántas veces más grande es la medida del largo de la plancha del Zócalo con respecto a su medida en el mapa? ______________________________

>>> Manos a la obra

I. En el **equipo 1** de otra escuela dijeron:

"Como la escala es 1 cm a 100 m, entonces la medida real del largo de la plancha del Zócalo es 100 veces mayor que su medida en el mapa."

En el **equipo 2** dijeron:

"La medida real del largo de la plancha del Zócalo no es 100 veces más grande que su medida en el mapa, ya que las unidades cambian de centímetros a metros. Y la medida real del largo de la plancha del Zócalo es 10 000 veces más grande que su medida en el mapa."

Comenten:

¿Con cuál de los dos argumentos están de acuerdo?, ¿por qué?

II. Contesten:

En el mapa el largo de la plancha del Zócalo mide 2.5 cm.

a) ¿Cuál es su medida real en centímetros? ______________________________

El ancho de la plancha del Zócalo mide 2.2 cm en el mapa.

b) ¿Cuál es su medida real en centímetros? ____________________

c) ¿Qué medida real en centímetros le corresponde a 1 cm del mapa?

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuántas veces más grande son las medidas reales del largo y ancho de la plancha del Zócalo que sus medidas en el mapa?

III. Completen la siguiente tabla para determinar las medidas reales en centímetros entre algunos lugares de la Ciudad de México a partir de las medidas del mapa:

	Medida en el mapa (cm)	**Medida real (cm)**
De la **Catedral** a la **Alameda Central**	12.2	
De la estación **Zócalo** del metro a la **Biblioteca Nacional**	7.5	
De la **Torre Latinoamericana** a la **Alameda**	3	
Del **Templo Mayor** al **Colegio de San Ildefonso**	1.3	
Largo de la **plancha del Zócalo**	2.5	
Ancho de la **plancha del Zócalo**	2.2	22 000

>>> A lo que llegamos

Cuando una escala está dada con cierto cambio de unidades, como 1 cm a 100 m, hay varias maneras de relacionar las medidas reales con las del mapa, por ejemplo:

- Si se quiere pasar de las medidas del mapa en **centímetros** a las reales **en metros**, la **constante de proporcionalidad** es **100 m por cada cm**; es decir, las medidas reales (en metros) se obtienen al multiplicar por 100 las del mapa (en centímetros).
- Si se quiere pasar de las medidas del mapa **en centímetros** a las reales en centímetros, la **constante de proporcionalidad** es **10 000 cm por cada cm**; es decir, las medidas reales se obtienen al multiplicar por 10,000 las del mapa.

Lo anterior quiere decir que las medidas reales son 10 000 veces más grandes que las del mapa, y no que las medidas reales sean 100 veces más grandes que las del mapa. Es decir, en este problema el **factor de escala** es **10 000**.

RUTAS Y TRANSPORTE

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la actualidad, el transporte es fundamental en las actividades que se realizan cotidianamente. Uno de los medios de transporte terrestre más usados es el camión.

Al número de kilómetros que el camión recorre por cada litro de gasolina que consume, se le llama rendimiento. Es útil conocer el rendimiento, por ejemplo, para saber qué cantidad de gasolina va a necesitar el camión para hacer un viaje largo.

>>> Consideremos lo siguiente

La tabla muestra las rutas que cubre una compañía de transporte y la distancia que hay entre los distintos lugares a los que llega.

Lugar de partida	Lugar de llegada	Distancia (km)
Hermosillo	Mexicali	682
Ciudad de México	Veracruz	435
Puebla	Acapulco	540
Acapulco	Ciudad de México	411
Ciudad de México	Querétaro	215

La compañía tiene dos tipos de camiones y el administrador quiere saber cuál de ellos tiene un mejor rendimiento, es decir, qué camión recorre más kilómetros por cada litro de gasolina. Lo que el administrador sabe es que:

- El camión del tipo 1 hace un recorrido de ida y vuelta de Puebla a Acapulco con 40 litros de gasolina.
- El camión del tipo 2 hace un recorrido de ida y vuelta de Querétaro a Veracruz, pasando por la Ciudad de México, con 50 litros de gasolina.

a) ¿Cuál de los dos tipos de camiones recorre más kilómetros por litro de gasolina?

____

b) ¿Cuántos litros de gasolina utilizaría el camión del tipo 1 en un recorrido de Hermosillo a Mexicali? ____

c) ¿Cuántos litros de gasolina utilizaría el camión del tipo 2 en un recorrido de Hermosillo a Mexicali? ____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Para encontrar cuál tipo de camión tiene el mejor rendimiento llenen las siguientes tablas.

Consumo de gasolina del camión tipo 1 (ℓ)	Distancia recorrida del camión tipo1 (km)
40	1 080
20	
10	
1	

Tabla 1

Consumo de gasolina del camión tipo 2 (ℓ)	Distancia recorrida del camión tipo 2 (km)
50	1 300
25	
5	
1	

Tabla 2

a) ¿Cuál es el rendimiento del camión del tipo 1? _______________________

b) ¿Cuál es el rendimiento del camión del tipo 2? _______________________

Comparen sus resultados y comenten:

c) ¿Cuál de los dos tipos de camiones tiene el mejor rendimiento? _____________

II. Con los datos anteriores, completen las siguientes tablas para encontrar cuántos litros de gasolina consumen los dos tipos de camión en un recorrido de Hermosillo a Mexicali:

Distancia recorrida del camión tipo1 (km)	Cantidad de gasolina consumida por el camión del tipo 1 (ℓ)
27	1
1	
682	

Tabla 3

Distancia recorrida del camión tipo 2 (km)	Cantidad de gasolina consumida por el camión del tipo 2 (ℓ)
26	1
1	
682	

Tabla 4

>>> A lo que llegamos

En estos problemas la **constante de proporcionalidad** índica el número de kilómetros que se recorren por cada litro de gasolina, es decir, el rendimiento.

El rendimiento del camión tipo 1 es de **27 km por cada ℓ**, mientras que el rendimiento del camión tipo 2 es de **26 km por cada ℓ**.

III. Ahora calculen las distintas cantidades de litros de gasolina que se consumen en otras rutas que cubre la compañía.

Rutas del camión 1:

Recorrido	Distancia en el recorrido (kilómetros)	Consumo de gasolina del camión 1
De Ensenada a Durango	2 187	
De Toluca a Colima	702	
De Morelia a Guanajuato	162	

Tabla 5

Rutas del camión 2:

Recorrido	Distancia en el recorrido (kilómetros)	Consumo de gasolina del camión 2
De Acapulco a Cuernavaca	312	
De Toluca a Colima	702	
De Ciudad de México a Puebla	130	

Tabla 6

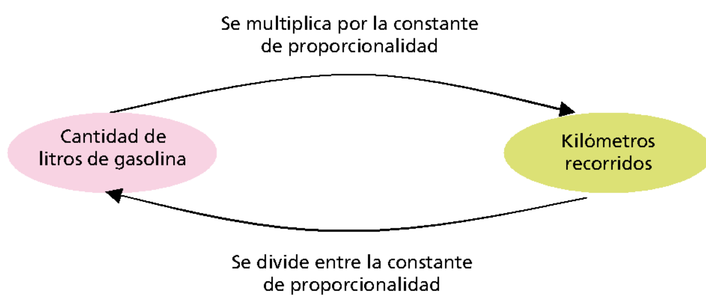
Comparen sus resultados y comenten:

c) ¿Cuáles son las constantes de proporcionalidad de las tablas 5 y 6?

____

>>> A lo que llegamos

En este problema multiplicar o dividir por la constante de proporcionalidad permite encontrar la cantidad de kilómetros recorridos a partir de la cantidad de litros de gasolina consumidos y al revés, es decir, permite encontrar los litros de gasolina consumidos a partir de los kilómetros recorridos. Esta situación se ilustra mediante el siguiente esquema.



>>> Lo que aprendimos

En tu cuaderno resuelve los siguientes problemas.

1. La base de un rectángulo mide 12 cm y su altura 5 cm. Se quiere hacer un dibujo a escala de ese rectángulo en el que la base mida 6 cm.

   a) ¿Cuántos centímetros debe medir la altura?

   b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar del tamaño original a la reducción?

   c) ¿Cuántas veces más chico es el dibujo reducido con respecto al original?

2. Los lados de un triángulo miden 5, 8 y 11 cm respectivamente. Se quiere hacer un dibujo a escala de ese triángulo de manera que el lado que mide 5 cm ahora mida 8 cm.

   a) ¿Cuánto deben medir los otros lados del triángulo?

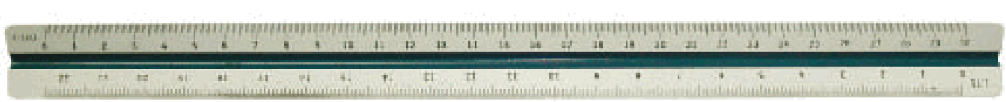
   b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

   c) ¿Cuántas veces más grande es el dibujo hecho a escala con respecto al original?

>>> Para saber más

Sobre las distancias que hay entre los distintos estados de la República Mexicana, así como algunas características especificas de éstos consulta:
http://www.trace-sc.com/maps_sp.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].

Sobre las reglas y las dimensiones completas de una cancha de basquetbol y de voleibol consulta:
http://es.wikipedia.org/wiki/B%C3%A1squetbol#Medidas
http://www.monografias.com/trabajos14/voleib/voleib.shtml
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].



Aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderán a interpretar el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en diversos contextos.

SESIÓN 1

MICROSCOPIOS COMPUESTOS

>>> Para empezar

Los microscopios son una de las herramientas tecnológicas que más descubrimientos científicos han impulsado en el área de las ciencias biológicas. En la secuencia 9 **¿Cómo medir seres pequeñitos?** de su libro de **Ciencias I** estudiaron algunos de estos descubrimientos. En la secuencia 6 de **Matemáticas I** conocieron las amplificaciones que se pueden hacer con los microscopios ópticos y cómo calcularlas. En esta sesión estudiarán las amplificaciones que se pueden hacer con microscopios de dos lentes, llamados microscopios ópticos compuestos.

Microscopios compuestos

Un microscopio óptico compuesto es un instrumento que amplifica las imágenes de los objetos usando dos lentes: la lente del objetivo y la lente del ocular. El objetivo es la parte del microscopio donde se pone el objeto que se va a observar, ahí está la primera lente. El ocular es la parte del microscopio donde se pone el ojo para observar la imagen amplificada del objeto, ahí está la segunda lente. La imagen del objeto es amplificada primero por la lente del objetivo y después por la lente del ocular.

>>> Consideremos lo siguiente

En el laboratorio de ciencias hay algunos microscopios compuestos. Uno de ellos tiene una lente en el objetivo que aumenta 30 veces el tamaño de los objetos. Además, tiene una lente en el ocular que aumenta 20 veces.

Llenen la siguiente tabla para encontrar el tamaño con el que se verán las imágenes usando este microscopio

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
Bacteria 1	2	
Cloroplasto	4	
Bacteria 2	6	
Glóbulo rojo	8	
Glóbulo blanco	12	

Tabla 1

Recuerden que:

El micrómetro es una unidad que sirve para medir longitudes muy pequeñas.

1 micrómetro = 0.001 milímetros, o sea, 1 000 micrómetros = 1 milímetro.

Anoten en el pizarrón las medidas que cada equipo encontró y expliquen qué operaciones hicieron.

>>> Manos a la obra

I. El instructivo del microscopio incluye una tabla con las medidas de las amplificaciones de algunas células. Estas medidas están revisadas y verificadas por el laboratorio que construyó el microscopio.

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño en el microscopio (micrómetros)
Espermatozoide humano	3	1 800
Célula vegetal	8	4 800
Bacteria 3	11	6 600
Célula animal	12	7 200
Óvulo humano	200	120 000

Tabla 2

a) La tabla 2 indica que una célula vegetal que mide 8 micrómetros se ve en el microscopio de 4 800 micrómetros. En la tabla 1 un glóbulo rojo también mide 8 micrómetros, ¿qué medida encontraron ustedes para la amplificación de un glóbulo rojo en el microscopio? ______

b) La tabla 2 indica que una célula animal que mide 12 micrómetros se ve en el microscopio de 7 200 micrómetros. En la tabla 1 un glóbulo blanco también mide 12 micrómetros, ¿qué medida encontraron ustedes para la amplificación en el microscopio? ______

c) ¿Coinciden sus medidas con las de la tabla 2? ______

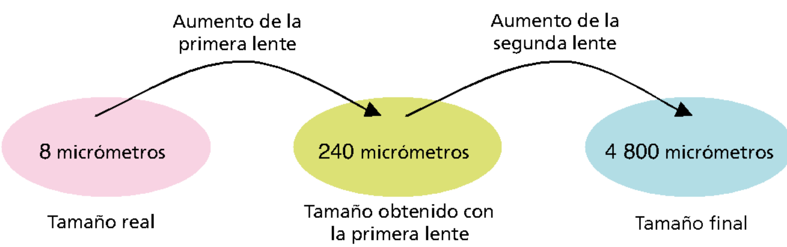
Comenten entre todos:

¿Mediante qué operación creen que se obtuvieron las medidas de la tabla 2?

______

Argumenten sus respuestas. Anoten las diferentes propuestas en el pizarrón.

II. En una escuela, un equipo hizo el siguiente esquema para calcular de qué tamaño se verá una célula vegetal en el microscopio:



a) ¿Por cuál número multiplicaron para obtener el aumento de la primera lente?

____

b) ¿Por cuál número multiplicaron para obtener el aumento de la segunda lente?

____

c) Llenen la tabla 3 para encontrar los aumentos que se obtienen con las dos lentes. Usen el esquema anterior para encontrar las medidas que faltan.

	Tamaño real (micrómetros)	Tamaño obtenido con la primera lente (micrómetros)	Tamaño final (micrómetros)
Bacteria 1	3	90	
Espermatozoide humano	8		4 800
Cloroplasto	11	330	
Glóbulo rojo	12		7 200
Glóbulo blanco	200		

Tabla 3

d) ¿Cómo encontrarían el tamaño final de una célula cuyo tamaño real es de 13 micrómetros haciendo una sola operación? _______________

e) ¿Y si el tamaño real de la célula fuera de 1 micrómetros? _______________

>>> A lo que llegamos

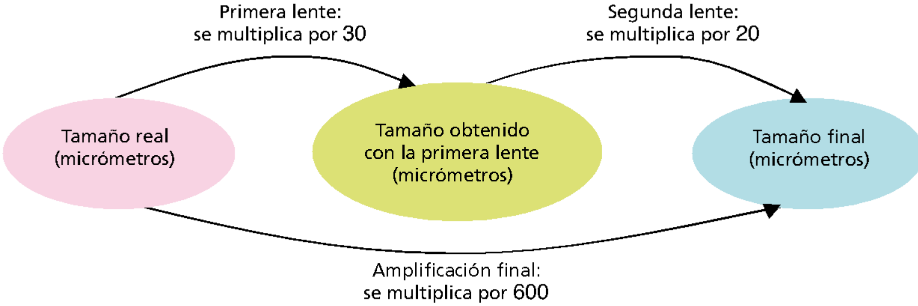
Con la primera lente del microscopio compuesto descrito, una célula que mida 5 micrómetros se verá de 150 micrómetros (porque 5 × 30 = 150), una que mida 6 micrómetros se verá de 180 micrómetros (porque 6 × 30 = 180), etcétera.

Los tamaños reales y sus amplificaciones son proporcionales. Con la primera lente cada célula amplifica su tamaño real 30 veces. En este ejemplo, al número que indica cuántas veces se amplifican las imágenes se le llama **constante de proporcionalidad**, y es **30 micrómetros por cada micra**.

La **constante de proporcionalidad** de la segunda lente es **20 micrómetros por cada micrómetro**.

La **constante de proporcionalidad** correspondiente a la **amplificación final** se obtiene al **multiplicar las constantes de proporcionalidad** de cada una de las dos lentes: en este caso **30 × 20 = 600**, es decir, **600 micrómetros por cada micrómetro**.

El siguiente esquema caracteriza lo dicho anteriormente:



ESCALAS Y REDUCCIONES

SESIÓN 2

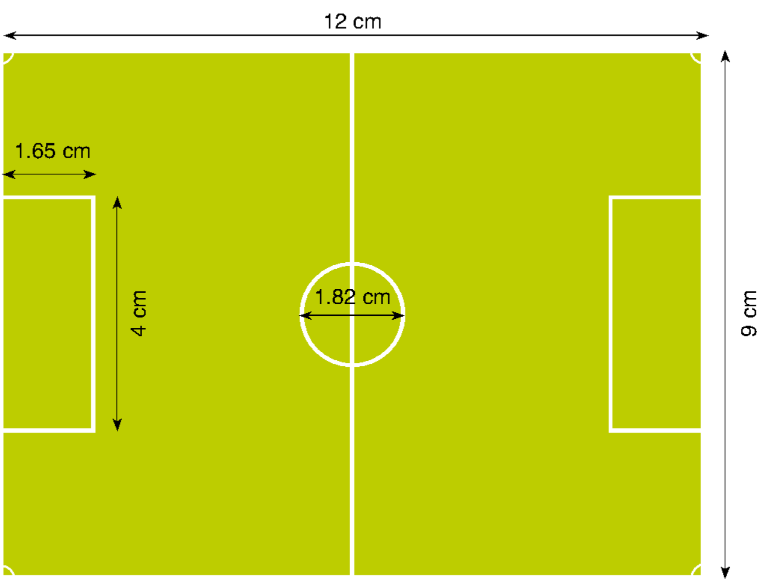
>>> Para empezar

Imagina que fuera necesario hacer el dibujo en tamaño real de una célula o de un edificio, ¿cómo lo harías? Con las escalas se pueden representar objetos muy pequeños o muy grandes porque permiten reducir o ampliar el tamaño real de los objetos de manera proporcional.

Una cancha reglamentaria de fútbol debe ser un rectángulo con las siguientes dimensiones: de largo debe medir entre 90 y 120 metros, y de ancho entre 45 y 90 metros.

>>> Consideremos lo siguiente

Observen un dibujo a escala 1 cm a 10 m de una cancha de futbol que tiene las medidas reglamentarias máximas.



Completen la siguiente tabla para encontrar algunas de las medidas de la cancha:

	Medida en el dibujo (cm)	Medidas reales de la cancha (m)
Largo de la cancha de futbol	12	
Ancho de la cancha de futbol	9	
Diámetro del círculo central	1.82	
Largo del área grande	4	
Ancho del área grande	1.65	

Tabla 1

Recuerden que:
En el factor de escala las mismas unidades se deben conservar.

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de una medida en el dibujo (en centímetros) a su medida real (en metros)? ________

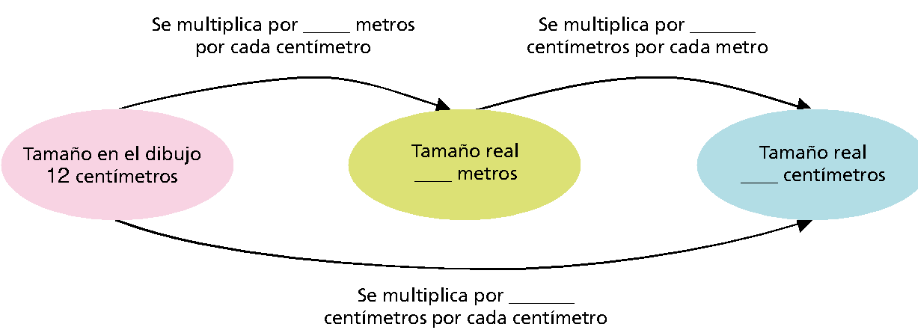
b) ¿Cuál es el factor de escala? ________________________________

c) ¿Cuántas veces más grande es cada una de las medidas de la cancha con respecto a su medida en el dibujo? ______________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Completen el siguiente esquema para encontrar la medida real del largo de la cancha calculada en centímetros:



Comenten

¿Cuántas veces es más grande la medida real del largo de la cancha que su medida en el dibujo?

II. Completen la siguiente tabla para saber cuántas veces es más grande cada una de las medidas reales de la cancha respecto a su medida en el dibujo.

	Medida en el dibujo (cm)	Medida real de la cancha (cm)
Largo de la cancha de futbol	12	
Ancho de la cancha de futbol	9	
Diámetro del círculo central	1.82	
Largo del área grande	4	
Ancho del área grande	1.65	

Tabla 2

¿Cuál es el factor de escala que permite pasar de las medidas en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en centímetros)? ______________________

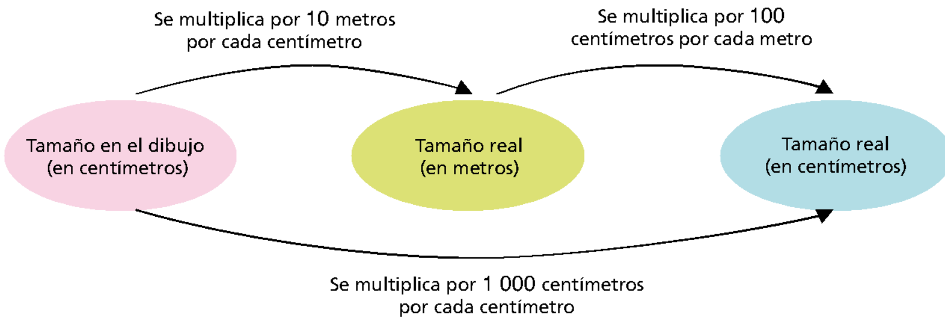
>>> A lo que llegamos

En este problema, para pasar de las medidas del dibujo a las medidas reales están involucradas varias constantes de proporcionalidad:

1. La **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas de la cancha en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en metros) es **10 metros por cada centímetro**.
2. La **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas reales (en metros) a las medidas reales en (centímetros) es **100 centímetros por cada metro**.

   Esta constante permite hacer el cambio de unidades de metros a centímetros.
3. Finalmente, la **constante de proporcionalidad** que permite pasar de las medidas de la cancha en el dibujo (en centímetros) a las medidas reales (en centímetros) es **1 000 centímetros por cada centímetro**.

   Este número resulta ser el **factor de escala**.



III. En el dibujo de la cancha de fútbol no aparecen las medidas del área chica. Completen la siguiente tabla para encontrar las dimensiones del área chica, de la portería y de la distancia que hay entre la portería y el lugar donde se cobra un tiro penal.

	Dimensiones reales de la cancha (m)	Dimensiones en el dibujo (cm)
Largo del área chica	18.5	
Ancho del área chica	5.5	
Largo de la portería	7.4	
Altura de la portería	2.45	
Tiro penal	9.15	
Ancho de los postes de la portería	0.12	

Tabla 3

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite pasar de las medidas reales de la cancha (en metros) a la medida en el dibujo (en centímetros)? ________

b) ¿Cuántas veces más chicas son las medidas del dibujo con respecto de su medida real? ________

>>> A lo que llegamos

En este problema las medidas del dibujo (en centímetros) se pueden obtener multiplicando por $\frac{1}{10}$ las medidas reales (en metros).
La **constante de proporcionalidad** es $\frac{1}{10}$ **centímetros por cada metro**, y permite pasar de cualquier medida real (en metros) a su medida en el dibujo (en centímetros).

El siguiente esquema te ayudará a comprender mejor la explicación anterior

Multiplicar por $\frac{1}{10}$ o dividir
entre 10 centímetros por cada metro

Medidas reales
de la cancha
(en metros)

Medidas reales del dibujo
de la cancha
(en centímetros)

Multiplicar por 10 metros
por cada centímetro

CONSOMÉ RANCHERO

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la secuencia 12 **¿Cómo evitar problemas relacionados con la alimentación?** de tu libro de **Ciencias I** conociste la importancia de tener una buena alimentación. Muchas veces las cantidades recomendadas de alimentos que deben consumirse se presentan en forma de raciones o porciones. Por ejemplo, en las recetas de comida, las cantidades de los ingredientes se presentan dependiendo del número de porciones que se van a preparar. En esta sesión encontrarás distintas maneras de calcular estas cantidades.

>>> Consideremos lo siguiente

Ésta es una receta para elaborar una sopa nutritiva y típica de la cocina mexicana, el consomé ranchero. Rinde para 5 porciones.

- 6 tazas de caldo de pollo;
- $\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada;
- $\frac{1}{2}$ cebolla picada;
- 1 jitomate picado;
- $1\frac{1}{2}$ tazas de arroz cocido;
- 4 cucharadas de cilantro picado.

Contesten en sus cuadernos:

Si se quisieran preparar 8 porciones de consomé ranchero ¿Qué cantidades de cada ingrediente se necesitarían?

Comparen sus resultados con los de otras parejas y comenten cómo los obtuvieron.

>>> Manos a la obra

I. En un grupo, el equipo 1 lo resolvió así:

"Calculamos primero los ingredientes para una porción de consomé ranchero y luego los multiplicamos por 8".

Luego hicieron la siguiente tabla para encontrar el número de tazas de caldo de pollo que se necesitan para preparar 8 porciones.

Número de tazas de caldo de pollo en 5 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 1 porción de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 8 porciones de consomé ranchero
6	$6 \div 5 = 1.2 = \frac{6}{5}$	$1.2 \times 8 = \frac{48}{5} = 9.6$

a) Completen la siguiente tabla usando el método del equipo 1.

Cantidades de cada ingrediente en 5 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 1 porción de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 8 porciones de consomé ranchero
6 tazas de caldo de pollo	$\frac{6}{5}$ tazas de caldo de pollo	$\frac{48}{5}$ tazas de caldo de pollo
$\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada		
$\frac{1}{2}$ cebolla picada		
1 jitomate picado		
$1\frac{1}{2}$ tazas arroz cocido		
4 cucharadas de cilantro picado		

b) ¿Por cuál número dividieron para ir de la primera a la segunda columna?

____

c) ¿Por cuál número multiplicaron para ir de la segunda a la tercera columna?

____

d) ¿Cuál es el número por el que se debe multiplicar o dividir para ir de la primera a la tercera columna? ______________________________

Comparen sus tablas y sus respuestas y expliquen cómo las obtuvieron.

II. El equipo 2 lo resolvió así:

"Cada ingrediente de la receta para 5 porciones lo multiplicamos por 8 y obtuvimos los ingredientes para 40 porciones, luego dividimos entre 5 cada uno de los ingredientes para las 40 porciones y así obtuvimos los ingredientes para 8 porciones."

Número de tazas de caldo de pollo en 5 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 40 porciones de consomé ranchero	Número de tazas de caldo de pollo en 8 porciones de consomé ranchero
6	$6 \times 8 = 48$	$48 \div 5 = 9.6 = \frac{48}{5}$

a) Completen la siguiente tabla usando el método del equipo 2.

Cantidades de cada ingrediente en 5 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 40 porciones de consomé ranchero	Cantidades de cada ingrediente en 8 porciones de consomé ranchero
6 tazas de caldo de pollo	48 tazas de caldo de pollo	$1\,\frac{48}{5}$ tazas de caldo de pollo
$\frac{1}{2}$ pechuga cocida y deshebrada		
$\frac{1}{2}$ cebolla picada		
1 jitomate picado		
$1\frac{1}{2}$ tazas arroz cocido		
4 cucharadas de cilantro picado		

En su cuaderno respondan las siguientes preguntas:

b) ¿Por cuál número multiplicaron para ir de la primera a la segunda columna?

c) ¿Por cuál número dividieron para ir de la segunda a la tercera columna?

d) ¿Cuál es el número por el que se debe multiplicar o dividir para ir de la primera a la tercera columna?

III. Comenten las siguientes preguntas:

¿Cuál de los dos métodos creen que sea correcto?

¿Cómo calcularon ustedes las cantidades necesarias para 8 porciones?

¿Les salió lo mismo que al equipo 1 y al 2?

>>> A lo que llegamos

En este problema se usaron dos métodos para hallar la cantidad que se necesitaría de cada ingrediente para preparar 8 porciones de consomé ranchero. Ambos están relacionados, ya que con el método del equipo 1 primero se divide entre 5 y luego se multiplica por 8, y con el del equipo 2, primero se multiplica por 8 y luego se divide entre 5.

La **constante de proporcionalidad** en este problema con cualquiera de los dos métodos es $\frac{8}{5}$.

>>> Lo que aprendimos

1. En una revista van a publicar una fotografía, pero no saben de qué tamaño se vería mejor ya impresa. La fotografía original mide 16 cm de largo por 8 cm de alto.

Contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno:

a) La fotografía A se obtendrá de reducir la fotografía original a la mitad. ¿Cuáles serán las medidas de la A?

b) La fotografía B se obtendrá de reducir la fotografía A a la cuarta parte. ¿Cuáles serán las medidas de la fotografía B?

c) ¿Cuántas veces más pequeña es la fotografía B respecto a la fotografía original?

d) Si a la fotografía B se le hace una ampliación de 8 veces su tamaño, ¿qué medidas tendrá la fotografía?

2. Finalmente, si a la fotografía original se le hace una reducción a la tercera parte de su tamaño y luego una ampliación del doble de su tamaño, ¿cuál es la constante de proporcionalidad por la cual deberán multiplicarse las medidas de la fotografía original para conocer las dimensiones de las reducciones hechas a la fotografía?

>>> Para saber más

Sobre una buena alimentación consulta:
http://www.nutricion.org/para_saber_mas/dieta_equilib_2.htm
[Fecha de consulta: 2 de mayo de 2007].
Sociedad Española de Dietética y Ciencias de la Alimentación.

División de números decimales

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos.

SESIÓN 1

EL METROBÚS

>>> Para empezar

En la Ciudad de México hay un transporte llamado **metrobús**. Es un autobús más largo que lo normal, que transita por una avenida llamada Insurgentes.

Para subirse al metrobús se usan tarjetas, las cuales se pasan por un aparato que permite el acceso.

En el aparato se marca el dinero disponible en la tarjeta, es decir, el saldo. El costo por viaje en el metrobús es de $3.50.

>>> Consideremos lo siguiente

En cada caso anoten para cuántos viajes alcanza el saldo de la tarjeta y cuánto sobra. Recuerden que el costo de un viaje es $3.50.

Número de viajes: ______

Sobra: ____________

Número de viajes: ______

Sobra: ____________

Número de viajes: ______

Sobra: ____________

Número de viajes: ______

Sobra: ____________

Platiquen con su grupo los resultados y la manera en que llegaron a ellos. Si utilizaron operaciones digan cuáles y cómo las usaron.

>>> Manos a la obra

I. Hallar el número de viajes que se puede hacer con cierta cantidad de dinero, equivale a dividir esa cantidad entre el costo de un viaje.

Utilicen los resultados que encontraron en el problema anterior y completen la tabla.

División	Cociente (número de viajes)	Residuo (lo que sobra)
24.00 ÷ 3.50		
37.50 ÷ 3.50		
75.00 ÷ 3.50		
115.50 ÷ 3.50		

Observen que al calcular el número de viajes, están calculando cuántas veces cabe el costo de cada viaje en el saldo.

II. Imaginen ahora un lugar donde el precio de cada viaje varía y hay costos muy bajos. Completen la tabla.

Saldo ($) (dividendo)	Costo del viaje ($) (divisor)	División	Número de viajes (cociente)
9	4.50	90 ÷ 4.50	
15	2.50		
4.50	1.50		
4.80	1.20		
9	1.80		
4	0.50		
8.50	0.50		
4	0.25		
5.25	0.25		
4	0.20		
4.30	0.10		

III. Analicen la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿En cuáles casos el cociente es menor que el dividendo? ____________

b) ¿En cuáles casos el cociente es mayor que el dividendo? ____________

c) Encuentren qué tienen en común aquellas divisiones en las que el cociente es mayor que el dividendo y anoten sus observaciones:

____

____

IV. Anoten el resultado al que llegaron al dividir

$4 \div 0.50 =$

Observen que este resultado equivale a multiplicar 4 por un número, ¿por cuál número?

____

Algunas divisiones entre un número con punto decimal pueden calcularse más fácilmente con una multiplicación. Completen la siguiente tabla.

Dividir entre:	Es lo mismo que multiplicar por:	Ejemplo resuelto con división	Ejemplo resuelto con multiplicación
0.50	2	$3 \div 0.5 = 6$	$3 \times 2 = 6$
0.25			
0.20			
0.10			
0.125			
0.01			

V. Resuelvan **mentalmente** las siguientes divisiones:

$2 \div 0.5 =$

$1 \div 0.125 =$

$3 \div 0.01 =$

$4 \div 0.25 =$

$1.5 \div 0.5 =$

$3 \div 0.1 =$

$12.\ 5 \div 2.5 =$

$9 \div 0.2 =$

VI. Platiquen a sus compañeros cómo resolvieron mentalmente alguna de las operaciones de la actividad anterior. Elijan una operación y anoten en el pizarrón varios procedimientos para resolverla mentalmente. Comenten cuál procedimiento es mejor y por qué.

>>> A lo que llegamos

- **Dividir una cantidad entre un número equivale a calcular cuántas veces cabe ese número en dicha cantidad.**
- **Algunas divisiones entre números con punto decimal pueden resolverse más rápidamente con una multiplicación, por ejemplo, $10 \div 0.25$ puede escribirse como $10 \div \frac{1}{4}$, que como estudiaron en la división de fracciones, equivale a multiplicar $10 \times 4 = 40$.**
- **Al dividir una cantidad entre un número menor que la unidad, el resultado será mayor que la cantidad, por ejemplo, $5 \div 0.2 = 25$, 25 es mayor que 5.**

El metrobús

Vean el video y realicen lo que ahí se pide. Cuando terminen, reúnanse en parejas y juntos hagan un resumen que se titule "La división con números decimales". Después lean el resumen ante su grupo.

SESIÓN 2

CAMBIO DE DINERO

>>> Para empezar

Se van a repartir $29.60 entre 4 amigos, ¿cuánto le toca a cada uno? En la primaria aprendiste que este problema se resuelve con la siguiente división:

$$\begin{array}{r|r} & 7.40 \\ \hline 4 & 29.60 \\ & 16 \\ & 00 \end{array}$$

El resultado es $7.40. Estas divisiones se resuelven igual que con números enteros, pero al momento de bajar el 6 "se sube el punto". ¿Saben por qué se hace así?

a) Cuando se divide 29 entre 4 se están dividiendo 29 enteros, por eso el resultado es entero.

b) Al bajar el 6 junto al 1 ya se están dividiendo 16 décimos entre 4, por eso hay que poner un punto, para indicar que el resultado corresponde a décimos.

Ahora aprenderás cómo se resuelve una división cuando el punto decimal está en el divisor.

>>> Consideremos lo siguiente

Araceli tiene $19.40 y le va a dar a cada uno de sus amigos $2.50. ¿Para cuántos amigos le alcanza y cuánto le sobra?

Esta situación también se resuelve con una división. Encuentren una manera de hallar el resultado de la siguiente división que resuelve el problema.

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 2.5 & 19.4 \end{array}$$

Expliquen a sus compañeros cómo resolvieron la división anterior y por qué lo hicieron así.

>>> Manos a la obra

I. Resuelvan las siguientes divisiones:

$4\overline{)\,8}$ $\qquad\qquad$ $40\overline{)\,80}$

$400\overline{)\,800}$ $\qquad\qquad$ $4\,000\overline{)\,8\,000}$

a) ¿Cómo son los resultados entre sí? ____________________

b) Observen que el dividendo (8) y el divisor (4) de la primera división se multiplicaron por 10 para obtener la segunda división (80 y 40).

c) ¿Por cuál número se multiplicaron dividendo y divisor de la primera división para obtener la tercera división? ____________________

d) ¿Por cuál número se multiplicaron dividendo y divisor de la primera división para obtener la cuarta división? ____________________

Recuerden que:
Si en una división se multiplica el dividendo y el divisor por el mismo número, el resultado de la división no cambia.

II. Consideren que se tiene esta división

$2.5\overline{)\,20}$

Multipliquen dividendo y divisor por 10, ¿qué división obtienen? Anótenla y resuélvanla.

$\overline{)}$

*Al multiplicar un número con punto decimal por **10**, se recorre el punto un lugar a la derecha.*

Esta división es más sencilla que 20 ÷ 2.5 y, por la propiedad que recordaron en la actividad I, saben que el resultado de esta división es el mismo para ambas.

III. Transformen cada división en una cuyo divisor no tenga punto decimal y resuélvanla; elijan bien el número por el que tienen que multiplicar cada una.

$1.2\overline{)\,48}$

$0.125\overline{)\,3.5}$

$0.32\overline{)\,4.5}$

IV. Resuelvan la división del problema inicial (19.4 ÷ 2.5) transformándola en una división sin punto en el divisor. Comparen este resultado con el que obtuvieron al principio de la sesión.

Comenten los resultados que han obtenido hasta este momento. Pasen al pizarrón a resolver las 3 divisiones de la actividad III y expliquen por cuál número multiplicaron el dividendo y el divisor de cada una y por qué.

>>> A lo que llegamos

Para resolver una división con punto decimal en el divisor:

1. **Primero se transforma la división en otra que no tenga punto decimal en el divisor, esto se logra multiplicando el dividendo y el divisor por 10, 1 00, 1 000, ... según el divisor tenga 1, 2, 3, ... cifras decimales.**
2. **Después se resuelve.**

Por ejemplo, para resolver:

$0.12\overline{)\,2.4}$

se multiplican por 100 el dividendo y el divisor para transformar la división en

$12\overline{)\,240}$

Y se resuelve:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 12\overline{)\,240} \\ 000 \end{array}$$

El resultado de dividir 240 ÷ 12 es el mismo que el resultado de dividir 2.4 ÷ 0.12. Compruébenlo con una calculadora.

>>> Lo que aprendimos

1. Araceli tiene \$50.00 en monedas de \$0.50 y quiere hacer montones de \$2.50; Luis tiene \$500.00 en monedas de \$5.00 y quiere hacer montones de \$25.00.

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

   a) Araceli hará más montones.

   b) Luis hará más montones.

   c) Ambos harán el mismo número de montones.

   d) No puede calcularse quién hará más montones.

   Justifica la respuesta que elijas.

   ____

   ____

   ____

2. Don Fernando va a repartir 7 ℓ de leche en envases de 0.5 ℓ. ¿Cuántos envases ocupará? ______________________

Completa la tabla de tal manera que el número de envases siempre sea el mismo que los que ocupará don Fernando.

Litros a repartir	**Capacidad de cada envase (ℓ)**	**Número de envases**
14		
	1.5	
28		
	5	
	10	

3. Resuelve la división 9.2 entre 2 = ______________________

Inventa 5 divisiones que, partiendo de los mismos números que la anterior, tengan igual cociente.

__________ __________ __________ __________ __________

NÚMEROS DECIMALES EN LA CIENCIA

>>> Lo que aprendimos

En esta sesión aplicarán varios de los conocimientos que han adquirido a lo largo de todas las secuencias sobre números con punto decimal. En cada caso, respondan la pregunta planteada.

La dureza de un mineral puede medirse de acuerdo con la facilidad para rayarlo. El mineral más duro es el diamante y su dureza es de 10. La mínima dureza de la plata es 2.5 y la del azufre es 1.5. ¿Cuántas veces es más duro el diamante que la plata? ____________________

¿Y que el azufre? ____________________

El crecimiento de las bacterias a menos de 10 ºC es muy lento, por ello los alimentos en el refrigerador se conservan más tiempo. La temperatura del congelador se conserva alrededor de los 18 ºC bajo cero y en el refrigerador puede estar alrededor de 4.5 ºC. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura del congelador y la del refrigerador?

____

El animal más grande del mundo es la ballena azul, llega a medir hasta 33 m de largo. El anfibio más grande es la salamandra gigante de Japón, con 1.5 m de largo. La araña más grande es la Goliath, puede medir 0.28 m de longitud. ¿Cuántas veces es más larga una ballena azul que una salamandra gigante? __________

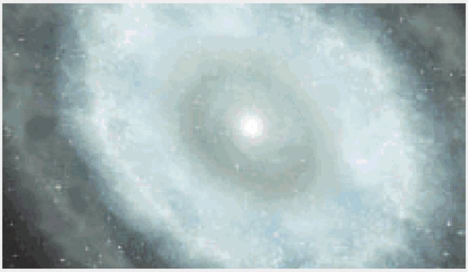
____________________,

¿Y que una araña Goliath? __________

____

La estrella más brillante que vemos en el cielo es Sirio, que se ve durante las noches de invierno. ¡La luz de Sirio tarda 8.8 años en llegar a la Tierra!

Si la luz viaja a 300 000 km/s, ¿qué operaciones tendríamos que hacer para conocer la distancia a la que está Sirio? ____________________



El cuerpo humano está formado por varios elementos: 63% de hidrógeno, 23.5% de oxígeno, 9.5% de carbono, 1.4% de nitrógeno y el resto de otros elementos. ¿Cuál es el porcentaje que corresponde en total a esos otros elementos? ______________________

____

Al caminar rápidamente se queman 0.097 calorías por cada kilogramo de peso por minuto. Si una persona caminando rápidamente quemó 6.305 calorías en un minuto, ¿cuánto pesa?

____

¿Cuánto tiempo, aproximadamente, tendría que caminar rápido esa persona para quemar 500 calorías?

____

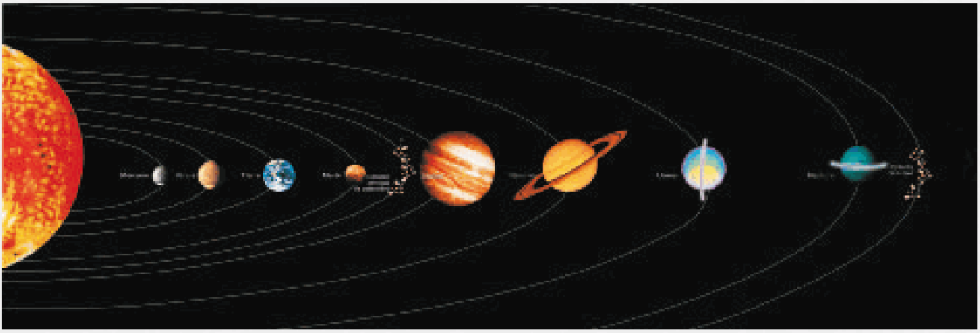
La Tierra, al viajar alrededor del Sol, recorre 30.5 kilómetros en un segundo.

¿En cuánto tiempo recorre 1 830 kilómetros? ______________________

Si el tiempo que tardan los planetas en dar la vuelta al Sol se mide en años, se tiene que: Neptuno tarda 165.4 años y Urano 83.7 años. ¿Cuál es la duración en años, meses y días del tiempo que tarda Neptuno en dar la vuelta al Sol?

______________________ ¿Y Urano?

____



Comenten con otros equipos los resultados de estos problemas. Comparen los procedimientos que muestren los diferentes equipos y elijan aquellos que les parezcan más fáciles.

>>> Para saber más

Sobre la división de números decimales consulta en: http://www.sectormatematica.cl/basica/decvida.htm [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007]. Ruta: Dar clic en "Relacionando multiplicación y división".

Ecuaciones de primer grado

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, cuando a, b y c son números naturales o decimales.

SESIÓN 1

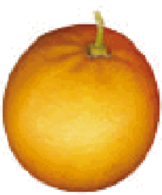
A REPARTIR NARANJAS

>>> Para empezar

En la primaria resolviste problemas en los que tenías que encontrar la solución haciendo operaciones aritméticas: sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. En esta secuencia aprenderás una nueva manera de resolver problemas: usarás expresiones algebraicas para representar y encontrar valores desconocidos.

>>> Consideremos lo siguiente

Un comerciante de naranjas quiere saber cuántos kilogramos de naranjas tenía al principio del día si vendió 24 kg y al final se quedó con 8 kg.



a) ¿Cuál es el valor desconocido en este problema? Subráyenlo:

- Los kilogramos de naranjas que vendió.
- Los kilogramos de naranjas que tenía al principio.
- Los kilogramos de naranjas que le quedaron al final.

b) En el problema hay dos valores que sí se conocen, ¿cuáles son?

____________________ ____________________

En la siguiente **igualdad**, el valor desconocido del problema es un número que debe estar en el recuadro azul:

$$\square - 24 = 8$$

c) ¿Cuál es el número que debe estar en el recuadro azul? ________________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Qué operación hicieron para encontrar el número que va en el recuadro azul?

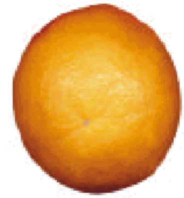
b) ¿Cuántos kilogramos tenía el comerciante al principio del día?

>>> Manos a la obra

I. Escriban el número que encontraron y hagan las operaciones para comprobar la igualdad:

$$\square - 24 = 8$$

II. Hay que encontrar un número que, al sumarle **57**, dé como resultado **124**.



a) En este problema hay dos números que sí se conocen, ¿cuáles son?

____________________ ____________________

En la siguiente **igualdad**, el número desconocido del problema es un número que debe estar en el recuadro morado. Completen la igualdad usando los números conocidos:

$$\blacksquare + \_\_\_ = \_\_\_$$

b) ¿Cuál es el número que va en el recuadro? ____________________

c) Comprueben la solución que encontraron:

En lugar del recuadro morado escriban el número que encontraron y hagan las operaciones:

$$\square + \_\_\_ = \_\_\_$$

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuál es el número que al sumarle **57** da como resultado **124**?

III. Representen con una igualdad el siguiente problema: ¿Cuál es el número que al sumarle **110** da como resultado **221**? Usen el recuadro rojo para representar el número desconocido.

$$\blacksquare + \_\_\_ = \_\_\_$$

a) ¿Cuál es el número que debe ir en el recuadro rojo? ____________________

b) ¿Qué operación hicieron para encontrarlo? ____________________

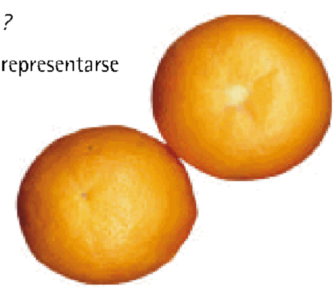
IV. Generalmente, en las matemáticas se utilizan letras para representar los valores desconocidos. Si en el problema anterior:

¿Cuál es el número que al sumarle **110** da como resultado **221**?

se usa la letra x para representar el valor desconocido, el problema puede representarse mediante la siguiente igualdad:

$$x + 110 = 221$$

Esta igualdad es la misma que: $\blacksquare + 110 = 221$



sólo que ahora se usa la letra x en lugar del recuadro rojo $\blacksquare$

a) ¿Qué operación hay que hacer para encontrar el valor de x? ______________

Complétenla:

$221 -$ ______

¿Cuánto vale x? $x =$ ______

b) Comprueben su resultado sustituyendo el valor que obtuvieron para x en la igualdad:

$\boxed{} + 110 = 221$

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Las igualdades como $x + 110 = 221$ son expresiones algebraicas en las que hay un valor desconocido o incógnita que generalmente se representa con una letra. Estas igualdades se llaman ecuaciones.

V. En la ecuación $m - 1 = 7$, ¿cuál es el valor desconocido o incógnita? Subráyenlo:

- 1
- m
- 7

a) ¿Qué operación hay que hacer para encontrar el valor de m?

b) ¿Cuánto vale m? $m =$ ______

c) Comprueben su resultado sustituyendo m por el valor que encontraron:

$\boxed{} - 1 = 7$

>>> A lo que llegamos

Para resolver la ecuación $x + 110 = 221$, en la que se está sumando, se puede hacer una resta: $x = 221 - 110$. La solución de esta ecuación es $x = 111$.

Para resolver la ecuación $m - 1 = 7$, en la que se está restando, se puede hacer una suma: $m = 1 + 7$. La solución de esta ecuación es $m = 8$.

Se dice entonces que la suma y la resta son operaciones inversas.

VI. El comerciante quiere saber ahora cuántos kilogramos de naranja tenía al principio, si en esta ocasión vendió primero **13** kg de naranja, después vendió **11** kg y finalmente se quedó con **5** kg.

a) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones representan el problema?

- $x - 13 - 11 + 5$
- $x - 13 + 11 = 5$
- $x - 24 = 5$
- $x - 13 - 11 = 5$

b) Resuelvan la ecuación, ¿cuánto vale x? $x =$ ______________________

Comparen las ecuaciones que escogieron y las soluciones que encontraron. Comenten:

a) ¿Cuántos kilogramos de naranja tenía el comerciante al principio?

b) Hay dos ecuaciones que representan el problema, ¿por qué creen que la solución de estas dos ecuaciones es la misma?

Comprueben su solución sustituyéndola en las dos ecuaciones:

$\boxed{} - 13 - 11 = 5$ $\qquad$ $\boxed{} - 24 = 5$

>>> Lo que aprendimos

1. Un camión que distribuye leche en un pueblo sale del establo con varios litros. Recoge **21** ℓ más en otro pueblo, deja **56** ℓ en una tienda, después deja **34** ℓ en otra tienda. Al acabar su recorrido se quedó con **15** ℓ de leche.

a) En este problema hay 4 valores conocidos, ¿cuáles son?

__________ __________ __________ __________

b) La ecuación $x + 21 - 56 - 34 = 15$ permite resolver el problema. Resuélvanla en sus cuadernos.

c) ¿Cuántos litros tenía el camión al salir del establo? __________

d) Comprueben si la solución que encontraron es correcta.

2. Para los siguientes problemas plantea una ecuación y resuélvela. Hazlo en tu cuaderno.

a) ¿Cuál es el número que al sumarle **27** da como resultado **138**?

b) ¿Cuál es el número que al restarle **2.73** da como resultado **5.04**?

Comprueba tus soluciones.

SESIÓN 2

EL PASEO ESCOLAR

>>> Consideremos lo siguiente

Para un paseo al que asistirán **280** niños se van a rentar **8** autobuses. Todos los autobuses van a llevar el mismo número de niños. Se quiere saber cuántos niños debe llevar cada autobús.

a) ¿Cuál es el valor desconocido en el problema? Subráyenlo.

- El número de niños que asisten al paseo.
- El número de autobuses que se rentan.
- El número de niños que van en cada autobús.

b) Usando la letra y escriban una ecuación que describa este problema:

____

c) Encuentren el valor de y

Comparen sus ecuaciones y sus resultados.

>>> Manos a la obra

En esta actividad se usará algo que aprendieron en la secuencia 4. Recuerden que $8y$ es lo mismo que **8** por y; el símbolo de la multiplicación aquí no se pone para no confundirlo con la letra x.

I. Una de las siguientes ecuaciones corresponde al problema anterior. Subráyenla:

- $280\ y = 8$
- $280 + y = 8$
- $y + 8 = 280$
- $8\ y = 280$

a) ¿Cuál de las siguientes operaciones permite encontrar el valor de y?

- $8 \div 280$
- 8×280
- $280 - 8$
- $280 \div 8$

b) Usando la operación que señalaron encuentren el valor de y.

$y =$ __________

c) Comprueben su solución sustituyendo el valor de y en la ecuación que escogieron. Háganlo en sus cuadernos.

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuántos niños debe llevar cada autobús?

II. Se quiere conocer la edad de Julián y se sabe que la tercera parte de su edad es igual a la edad de Diego, que tiene 4 años.

a) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a este problema? Se usa la letra *J* para representar a la edad de Julián.

- $J \times 3 = 4$
- $J \div 3 = 4$
- $J \div 4 = 3$
- $\frac{J}{3} = 4$

b) ¿Cuántos años tiene Julián? ____________

c) En sus cuadernos, comprueben su solución sustituyendo el valor de *J* en la ecuación que escogieron.

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

a) ¿Cuáles son las dos ecuaciones que corresponden a este problema?

b) ¿Qué operación hicieron para encontrar la edad de Julián?

c) ¿La edad de Julián que encontraron es la cuarta parte de la edad de Diego?

III. En la siguiente tabla se presentan algunos problemas, sus ecuaciones correspondientes y las operaciones con las que se pueden resolver. Complétenla.

Problema	Ecuación	Operación que se hace para encontrar la incógnita	Valor de la incógnita
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por **3** da **57**?			
¿Cuál es el número que al dividirlo entre **6** da **48**?	$x \div 6 = 48$		
¿Cuál es el número que al multiplicarlo por____ da ____?	$m \times 25 = 165$	$165 \div 25$	
¿Cuál es el número que al dividirlo entre **7** da **12.5**?		$12.5 \times$ ______	87.5

Comparen sus tablas.

>>> A lo que llegamos

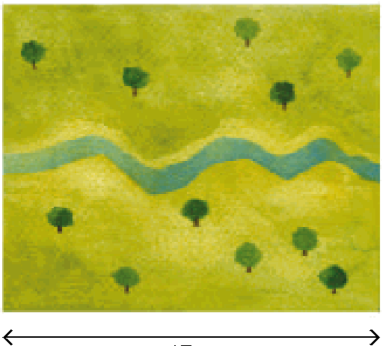
En la ecuación $2y = 16$, el número 2 está **multiplicando** a la incógnita *y*. Para encontrar el valor de *y* se puede hacer una **división**: $16 \div 2$. La **solución** de la ecuación es $y = 8$.

En la ecuación $s \div 5 = 6$, el número 5 está **dividiendo** a la incógnita *s*. Para encontrar el valor de *s* se puede hacer una multiplicación: 6×5. La **solución** de la ecuación es $s = 30$.

Se dice entonces que la **multiplicación** y la **división** son operaciones inversas.

>>> Lo que aprendimos

El terreno y el río



17 m

El terreno rectangular que se muestra en la figura de la izquierda está atravesado por un río y no es posible medir su ancho. ¿Cómo se puede calcular el ancho si se sabe que el terreno mide de largo **17 m** y el área que ocupa es **238 m**^{2}?

a) Escriban una ecuación para resolver el problema anterior:

____

b) Encuentren el valor de la incógnita. ______________________________

____

c) Comprueben el valor que encontraron para la incógnita.

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuánto mide el ancho del terreno?

SESIÓN 3

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MIXTAS

>>> Consideremos lo siguiente

Juan pensó un número. Lo multiplicó por **3** y a lo que le salió le restó **5**. Al final obtuvo **10**.

a) Escriban una ecuación para encontrar el número que pensó Juan.

Usen la letra x para representarlo. ______________________________

b) ¿Cuál es el número que pensó? ______________________________

Comparen sus ecuaciones y soluciones. Comenten:

¿Qué operaciones hicieron para resolver la ecuación?

>>> Manos a la obra

I. ¿Cuál es la incógnita en el problema?

- El resultado de multiplicar por **3**.
- El resultado que obtuvo Juan al final.
- El número que pensó Juan.

Juan hizo dos operaciones con el número que pensó.

a) ¿Cuál fue la primera operación que hizo? ______________________________

b) ¿Cuál fue la segunda operación que hizo? ______________________________

c) Una de las siguientes ecuaciones sirve para encontrar el número que pensó Juan, ¿cuál es?

- $3x - 5x = 10$
- $3x + 10 = 5$
- $3x - 5 = 10$

Comparen sus ecuaciones y soluciones.

Comenten: la ecuación $5x - 3 = 10$ no corresponde a este problema, ¿por qué?

II. En la ecuación $3x - 5 = 10$ se hacen dos operaciones: **primero** se **multiplica 3 por** x, y **después**, al resultado se le **resta 5**.

a) ¿Qué número creen que obtuvo Juan al hacer la operación: $3x$? ______

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

b) En la ecuación $3x - 5 = 10$, ¿cuál es la operación que hay que hacer para encontrar el valor de $3x$? ______

Completen:

$$3x = 10 + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

c) En la ecuación $3x = 15$, ¿cuál es la operación que hay que hacer para encontrar el valor de x? ______

Completen:

$$x = 15 \div \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

d) En sus cuadernos, comprueben el valor que encontraron para el número que pensó Juan, sustituyéndolo en la ecuación.

III. Ana pensó un número. Lo dividió entre **4** y después, a lo que le salió, le sumó **6**. Al final obtuvo **11**.

a) ¿Cuál es la primera operación que hizo Ana? ______

b) ¿Cuál es la segunda operación que hizo Ana? ______

c) Escriban una ecuación para encontrar el número que Ana pensó. Usen la letra y para representarlo. ______

$$y \div 4 + \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

d) ¿Cuál es el valor de y?

$$y = \_\_\_\_\_$$

e) Comprueben la solución en sus cuadernos.

Comparen sus ecuaciones y soluciones.

Comenten: La ecuación $y - (2 \div 8)$ no corresponde al problema, ¿por qué?

Recuerden que:
$3x$ es lo mismo que 3 por x. El símbolo de la multiplicación no se pone para no confundirlo con la letra x.

>>> A lo que llegamos

Para resolver ecuaciones en las que se hacen dos operaciones con la incógnita, como $5x + 1 = 21$, hay que respetar el orden de las operaciones. Una manera de resolver estas ecuaciones es la siguiente:

Primero. Encontrar el valor de $5x$:

$$5x = 21 - 1$$

$$5x = 20$$

Segundo. Encontrar el valor de x:

$$x = 20 \div 5$$

$$x = 4$$

En la ecuación $(y \div 6) - 8 = 4$ se pone un paréntesis para indicar que **primero** se divide entre **6** y **después** se resta **8**. Nuevamente se resuelve la ecuación respetando el orden de las operaciones:

Primero. Se encuentra el valor de $y \div 6$:

$$y \div 6 = 4 + 8$$

$$y \div 6 = 12$$

Segundo. Se encuentra el valor de y:

$$y = 12 \times 6$$

$$y = 72$$

IV. En el rectángulo de la figura 1 la medida de la base es igual al doble de la medida de la altura más **1 cm.**

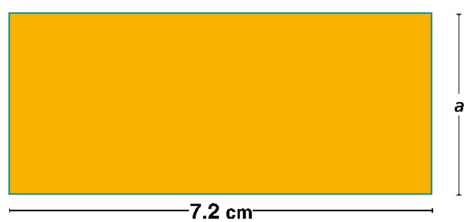


Figura 1

De las siguientes ecuaciones señalen las que sirven para encontrar la altura.

- $a \times 2 + 7.2 = 1$
- $2a + 1 = 7.2$
- $(a \div 2) + 1 = 7.2$
- $a \times 2 + 1 = 7.2$

Comparen las ecuaciones que escogieron y comenten:

a) ¿Cuáles son las operaciones que se hacen en este problema?

b) ¿Cuáles son las dos ecuaciones que permiten resolver el problema?

Encuentren el valor de la altura y comprueben su respuesta sustituyéndolo en la ecuación.

>>> Lo que aprendimos

1. La mitad del número de alumnos que hay en primer año más **29** es igual a **44**.

   a) Escribe una ecuación para este problema: ____________________

   b) ¿Cuántos alumnos hay en primer año?____________________

2. En tu cuaderno resuelve los siguientes problemas. Puedes usar ecuaciones.

   a) Si pienso un número, lo multiplico por **2**, a lo que me sale le resto **3** y al final obtengo **15.8**. ¿Cuál es el número que pensé?

   b) Si a la cuarta parte de un número le sumo **23.5** obtengo **117.7**. ¿Cuál es el número?

3. Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones. Escribe los procedimientos en tu cuaderno.

   a) $3x + 0.1 = 10$

   b) $(x \div 2) + 44 = 100$

   c) $x + 23 - 15 = 29.2$

   d) $(x \div 3) + 25 = 46$

4. **Un reto.** Resuelve el siguiente problema. Intenta hacerlo solo, pero si tienes dudas, puedes consultar a tu maestro o a otros compañeros.

   Eugenio abrió una cuenta en el banco con cierta cantidad inicial de dinero, pero no recuerda cuánto. Después de un tiempo esta cantidad inicial se triplicó. Eugenio retiró todo el dinero que tenía y gastó **150** pesos. El resto lo repartió entre tres amigos, de modo que a cada uno le tocaron **100** pesos. Ayúdale a Eugenio a recordar cuánto dinero depositó en el banco.

   a) Escribe una ecuación que corresponda a este problema. ____________________

   b) Resuelve la ecuación en tu cuaderno.

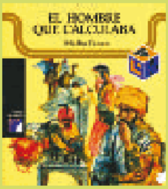
   c) ¿Cuánto dinero depositó Eugenio en el banco? ____________________

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos y Claudia Gómez. *Una ventana a las incógnitas.* México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Tahan, Malba. *El hombre que calculaba.* Trad, Basilio Lozada. México: SEP/Editorial Limusa, Libros del Rincón, 2005.



Existencia y unicidad

En esta secuencia construirás triángulos y cuadriláteros, y analizarás las condiciones de existencia y unicidad.

SESIÓN 1

¿EXISTE O NO EXISTE?

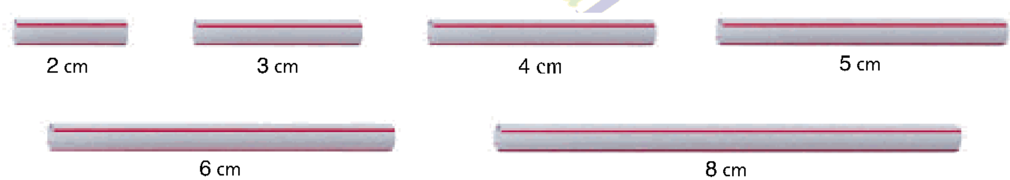
>>> Para empezar

Cuando se pide construir una figura geométrica con ciertas condiciones, a veces es posible hacerlo y a veces no. Por ejemplo, ¿crees que sea posible trazar un triángulo cuyos lados midan 10 cm, 1 cm y 1 cm?; ¿por qué?

Éste es el tipo de reflexiones que realizarás a lo largo de la secuencia. Es importante que hagas tus suposiciones o hipótesis y luego trates de comprobarlas.

>>> Consideremos lo siguiente

Recorten popotes de las siguientes medidas.



Traten de formar triángulos, usando como lados tres de los pedazos de popotes que cortaron. Completen la siguiente tabla, anoten ✓ cuando sea posible formar el triángulo.

Medida de los popotes para formar el triángulo	¿Es posible formar el triángulo?
8 cm, 3 cm, 2 cm	
8 cm, 6 cm, 4 cm	
8 cm, 4 cm, 2 cm	
6 cm, 4 cm, 3 cm	
6 cm, 3 cm, 2 cm	

a) ¿Siempre fue posible construir triángulos con las tres longitudes? ____________

b) Escriban tres longitudes de los popotes que no estén en la tabla con las que crean que *sí es posible* construir un triángulo . __________, __________, __________

c) Escriban tres longitudes de los popotes que no estén en la tabla con las que crean que *no es posible* construir un triángulo. __________, __________, __________

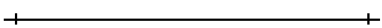
Comenten sus hallazgos y resultados con sus compañeros de grupo. Expliquen cuándo creen que dadas tres longitudes es posible construir un triángulo y cuándo no es posible.

>>> Manos a la obra

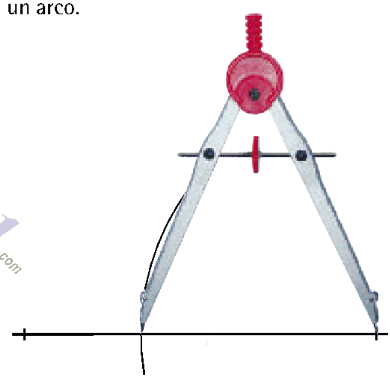
I. Recuerden cómo se construye con regla y compás un triángulo si se conocen las medidas de sus lados.

Construir un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 4 cm y 3 cm.

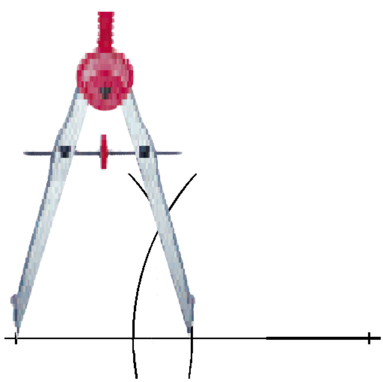
Paso 1. Se traza un segmento de cualquiera de las medidas dadas, por ejemplo, 6 cm.



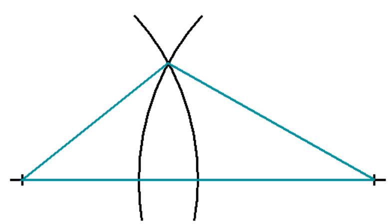
Paso 2. Se abre el compás a cualquiera de las otras dos medidas y con centro en un extremo del segmento, se traza un arco.



Paso 3. Se abre el compás a la tercera medida y con centro en el otro extremo del segmento, se traza un arco que cruce al anterior.



Paso 4. Se unen los extremos del segmento con el punto donde se cortan los arcos y se obtiene el triángulo pedido.



II. Utilicen sus instrumentos geométricos para trazar en su cuaderno triángulos cuyos lados midan

a) 8 cm, 9 cm, 7 cm.

b) 9 cm, 5 cm, 6 cm.

c) 6 cm, 3 cm, 2 cm.

III. Respondan las preguntas:

a) ¿Pudieron trazar los tres triángulos? ______________________

b) ¿Cuál fue imposible trazar? ______________________

c) Si dos lados de un triángulo miden 6 cm y 3 cm, indiquen una posible longitud para el tercer lado, de manera que se pueda trazar el triángulo. __________

d) Tracen en su cuaderno triángulos en los que dos de sus lados midan 6 cm y 3 cm y el tercer lado tenga la longitud que ustedes indiquen.

e) Si se pone la condición de que la medida del tercer lado sea un número entero, ¿cuántos triángulos diferentes pueden trazarse con dos lados que midan 6 cm y 3 cm? ______________________

IV. Propongan tres medidas de lados diferentes a las anteriores para que puedan trazar un triángulo.

a) ¿Cuáles son esas medidas? __________ __________ __________

b) Tracen el triángulo en su cuaderno y verifiquen su hipótesis; si no se puede trazar, intenten con otras medidas.

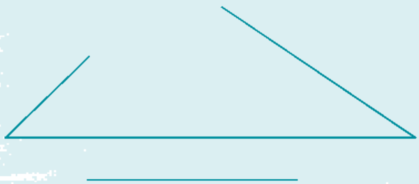
V. Sin hacer trazos, anoten ✓ a los triángulos que sí pueden trazarse.

Medida de los lados	¿Existe el triángulo?
10 cm, 5 cm, 5 cm	
8 cm, 9 cm, 2 cm	
1 cm, 0.5 cm, 2 cm	
2.5 cm, 3 cm, 1.5 cm	
$4\frac{1}{2}$ cm, $3\frac{1}{2}$ cm, 9 cm	

Comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo, traten de concluir qué condición deben cumplir las tres medidas de los lados de un triángulo.

>>> A lo que llegamos

No siempre es posible construir un triángulo cuando se dan tres medidas de los lados, por ejemplo, no existe un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 4 cm y 2 cm.



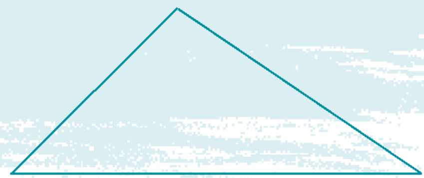
Para que el triángulo exista, cada uno de los lados debe ser menor que la suma de los otros dos.

Por ejemplo, sí existe un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 4 cm y 5 cm, porque:

7 es menor que 4 + 5.

4 es menor que 7 + 5.

5 es menor que 7 + 4.

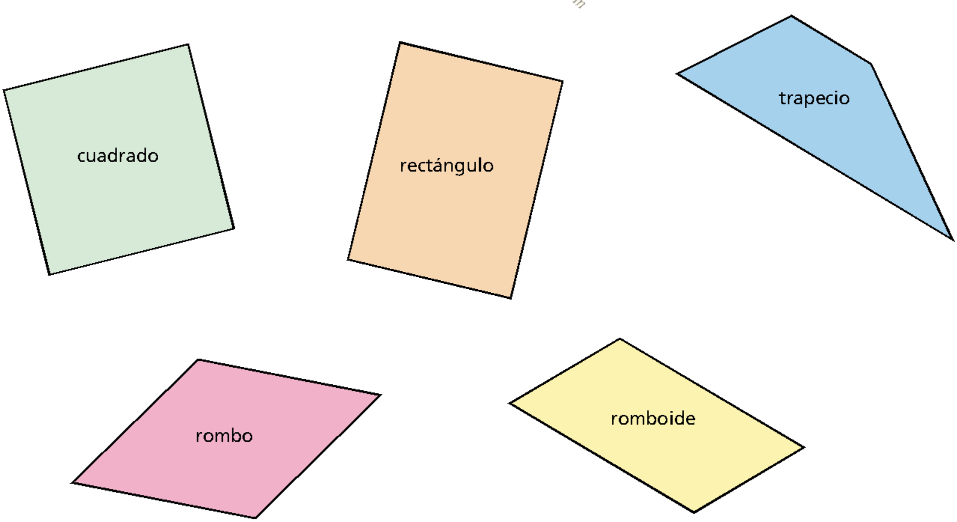


¿ES UNO O SON MUCHOS?

SESIÓN 2

>>> Para empezar

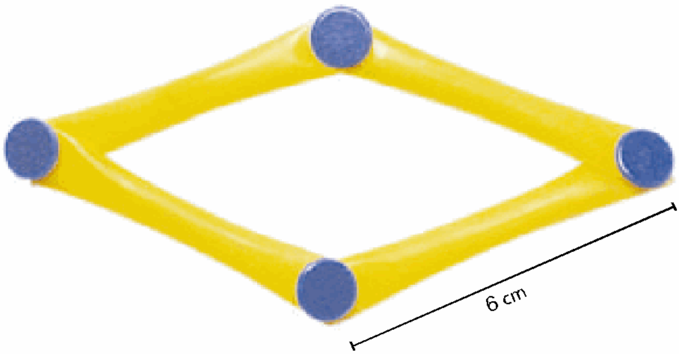
En la lección anterior te diste cuenta de que a veces es posible trazar triángulos con ciertas medidas, y a veces no. En esta lección explorarás los cuadriláteros, ¿los recuerdas? Son figuras de cuatro lados.



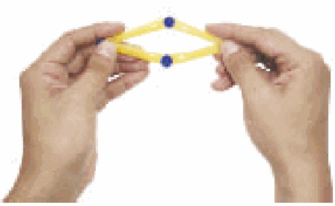
Se analizará si, dadas ciertas condiciones, es posible trazar uno o muchos cuadriláteros.

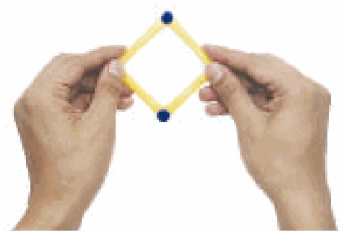
>>> Consideremos lo siguiente

Recorten 4 popotes de 6 cm y armen con ellos un rombo; unan los popotes cosiéndolos con hilo o poniéndoles una tachuela.



Observen que el rombo va cambiando al jalar dos de sus vértices opuestos.





a) Cambien el rombo hasta formar un cuadrado.

b) Cambien el rombo hasta que formen otro cuyos ángulos midan 120° y 60°.

c) Cada vez que jalan los vértices ¿se forma un rombo diferente al anterior? ____

____

d) ¿Qué es lo que varía en estos rombos? ______________________

e) Si se te pide que traces un rombo cuyos lados midan 6 cm, ¿hay una solución o varias? __________________________. ¿Por qué?

____

Comenten y comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En particular, mencionen:

- ¿Cuántos rombos diferentes que midan 6 cm de lado pueden trazar?
- ¿Qué otro dato es necesario dar para que los rombos que se tracen sean todos iguales en forma y tamaño?

>>> Manos a la obra

I. Tracen lo que se pide:

1. Un rectángulo cuya base sea el siguiente segmento:

¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden trazar? ____________________

2. Un rectángulo cuya altura sea el siguiente segmento:

¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden trazar? ____________________

3. Un rectángulo cuya base y altura sean los siguientes segmentos:

a) ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden trazar en la actividad 3? __________

b) ¿Cuántas medidas del rectángulo deben darse para que sólo pueda trazarse un rectángulo? ____________________

II. Utilicen sus instrumentos geométricos para trazar en su cuaderno un romboide cuya base mida 8 cm y su altura 5 cm.

Comparen sus romboides.

a) ¿Cumplen con las condiciones pedidas: base 8 cm y altura 5 cm? ______

______

b) ¿Son iguales todos los romboides que trazaron? ______

c) ¿En qué varían? ______

d) ¿Cuántos romboides diferentes se pueden trazar que midan 8 cm de base y 5 cm de altura? ______

e) ¿Qué otro dato es necesario dar para que sólo exista UN romboide con esas características? ______

f) Tracen un romboide cuya base mida 7 cm, altura 5 cm y con un ángulo de 45°.

g) ¿Cuántos romboides diferentes se pueden trazar con estas características? ______

______

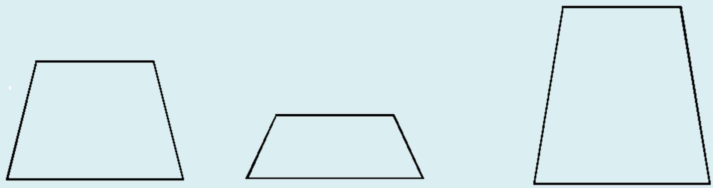
III. Analicen los datos y anoten si es posible trazar uno varios cuadriláteros con las características que se piden en cada caso.

Características	¿Existe uno o varios o no existe?
Un rombo cuyo lado mida 9 cm	
Un cuadrado cuyo lado mida 6 cm	
Un cuadrilátero cuyos lados midan 10 cm, 5 cm, 2 cm y 1 cm	
Un romboide cuya base mida 6 cm y uno de sus ángulos 130°	
Un rombo que tenga dos ángulos opuestos que midan 40° y los otros dos 140°	
Un trapecio isósceles cuya base mayor mida 6 cm y la base menor 4 cm	
Un cuadrado cuya diagonal mida 10 cm	

Comparen con otros compañeros de grupo los resultados que obtuvieron; argumenten sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Si se pide que se trace un trapecio isósceles cuya base mayor mida 3 cm y su base menor mida 2 cm, puedes observar que existen varias soluciones. Cada trapecio tiene diferente altura, pero cumple con las medidas de las bases.



En cambio, si se pide un trapecio isósceles cuya base mayor mida 5 cm, la base menor 4 cm y la altura 2 cm, todos los trapecios isósceles que se tracen con estas características serán iguales en forma y tamaño.

¿Es uno o son muchos?

Ahora ya sabes que cuando se dan ciertas condiciones para hacer trazos geométricos, es probable que la figura con esas condiciones no pueda trazarse o, en caso de que sí pueda trazarse, es probable que tenga varias respuestas correctas o sólo una.

>>> Para saber más

Sobre las propiedades de los triángulos y cuadriláteros consulten:
http://matematicas.net/paraiso/cabri.php?id=trianprop
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Áreas y perímetros

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de triángulos, romboides y trapecios, y establecerás relaciones entre los elementos que se utilizan para calcular el área de cada una de estas figuras. También realizarás conversiones de medidas de superficie.

SESIÓN 1

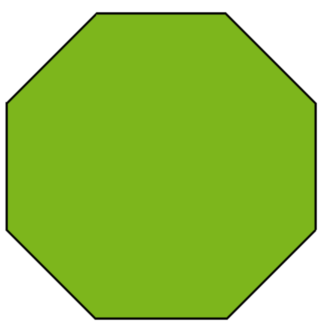
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

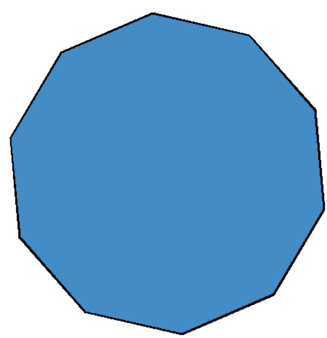
>>> Para empezar

Tanto en la primaria como en las secuencias 4 y 14 has estudiado, conocido y justificado algunas fórmulas para calcular perímetros y áreas. Ahora se trata de que apliques estos conocimientos a la resolución de problemas. ¿Listo?

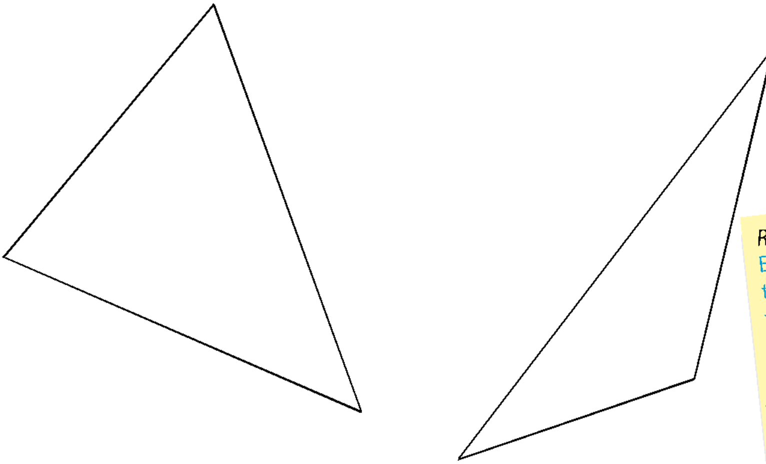
>>> Lo que aprendimos

1. Para cada polígono regular midan lo que sea necesario y calculen su área. Uno de ustedes utilice el método de sumar las áreas de los triángulos, y el otro la fórmula del área.





2. De los siguientes triángulos, elijan el lado que quieran como base y tracen la altura correspondiente. Tomen las medidas necesarias y calculen el área y el perímetro.



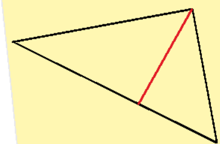
Área ______________________ Área ______________________

Perímetro __________________ Perímetro __________________

En sus cuadernos tracen un triángulo que tenga la misma área que el primer triángulo de este ejercicio.

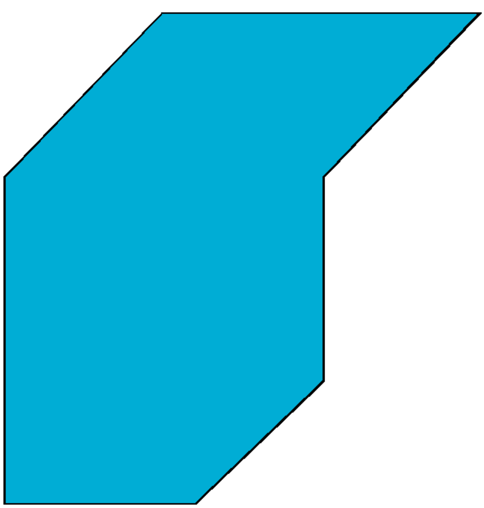
Recuerden que:

En el siguiente triángulo se ha trazado una de sus alturas.



La altura es perpendicular al lado que se elige como base y pasa por el vértice opuesto a ese lado.

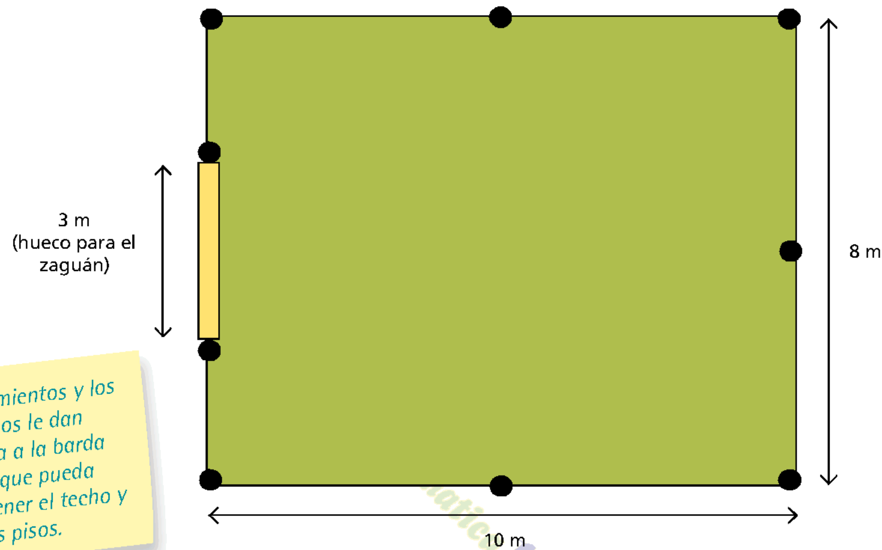
3. ¿Cuál es el área del siguiente terreno de forma irregular? Tomen las medidas necesarias y consideren que la escala es 1:200.



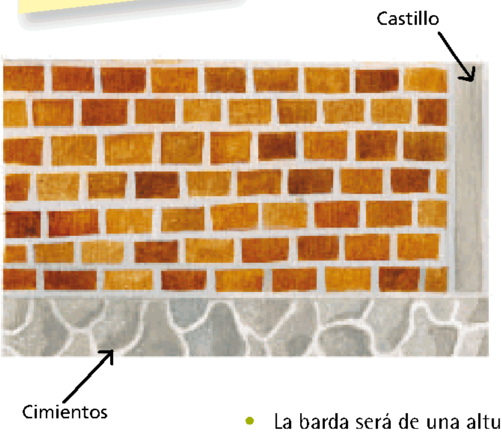
4. Alejandro va a hacer un papalote en forma de rombo, quiere que las diagonales midan 50 cm y 70 cm. ¿Qué superficie estará en contacto con el viento? ______

______

5. Se va a construir la barda de un terreno con las siguientes medidas:



Los cimientos y los castillos le dan fuerza a la barda para que pueda sostener el techo y otros pisos.



Los albañiles cobran lo siguiente:

Metro de cimientos	$200
Metro de castillos	$80
Metro cuadrado de tabique	$50

- La barda será de una altura de 3 m.
- Cada punto negro indica el lugar donde se pondrá un castillo.
- El tabique se cobra parejo, sin descontar el espacio que ocupan los castillos.
- Los cimientos van alrededor de todo el terreno, incluso en la parte del zaguán.

a) ¿Cuánto se pagará de mano de obra a los albañiles? ______

Comparen todos los procedimientos y resultados con los de otras parejas y, además, comenten:

a) La dificultad de tomar medidas exactas en algunos de los ejercicios anteriores y la manera en que esto se refleja en resultados diferentes, aunque muy cercanos.

b) La manera en que se trazan y miden las alturas de los triángulos.

RELACIONES IMPORTANTES

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En sesiones anteriores aprendiste a resolver ecuaciones, recuerda que el dato desconocido se llama incógnita y que puede representarse con una letra. En varias secuencias has estudiado la proporcionalidad y has elaborado tablas de proporcionalidad. Ahora te invitamos a que apliques tus conocimientos de ecuaciones y proporcionalidad para resolver problemas relacionados con el perímetro y el área de figuras.

>>> Lo que aprendimos

1. Para cada problema deben plantear la ecuación correspondiente y resolverla.

a) Doña Lupita usó 1.60 m de listón que colocó alrededor de una servilleta cuadrada para las tortillas. ¿Cuánto mide de lado la servilleta?

Resultado: ______________________

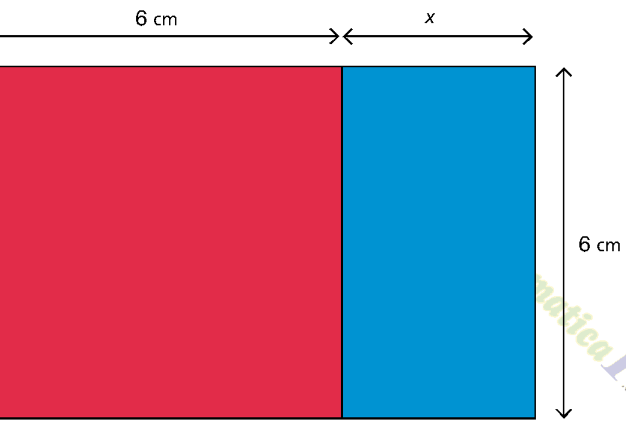
b) ¿Cuánto mide de largo un corte de tela rectangular de ancho 1.5 m y de 40 m^2 de superficie?

Resultado: ______________________

c) Un rectángulo de 28 cm de perímetro mide de ancho 6 cm menos que su largo. ¿Cuál es su área?

Resultado: ____________________

d) Escriban y resuelvan la ecuación que permite calcular el valor de ***x***, sabiendo que el área total de la figura es 45 cm².



Ecuación:

2. En cada caso completen la tabla y determinen si se trata de una relación de proporcionalidad directa y justifiquen por qué.

a) Perímetro de un cuadrado.

Lado del cuadrado (cm)	Perímetro
1	
2	
3	
4	

¿Es una tabla de variación proporcional? ____________________

¿Por qué? ____________________

En caso de que sí sea de proporcionalidad, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

____

b) Un rectángulo mantiene una base fija de 4 cm y su altura varía.

Medida de la altura (cm)	Área
2	
3	
4	
5	

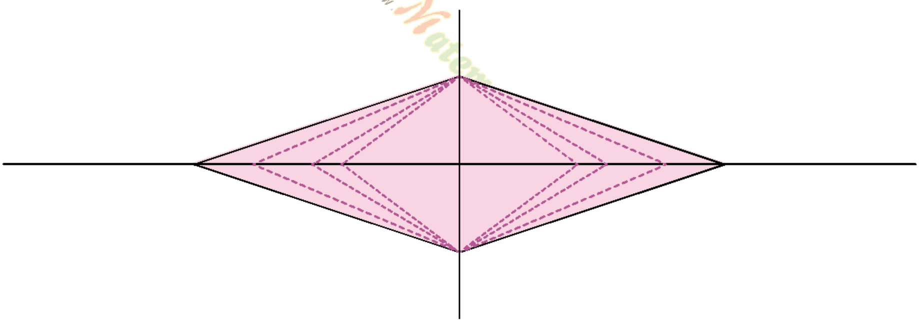
¿Es una situación proporcional? ______________________

¿Por qué? ______________________________

En caso de que sí sea de proporcionalidad, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

____

c) Un rombo mantiene la diagonal menor fija de 3 cm y la mayor varía.



Diagonal mayor (cm)	Área
4	
5	
7	
9	

¿Es una situación proporcional? ______________________

¿Por qué? ______________________________

En caso de que sí sea de proporcionalidad, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

____

d) Área de un cuadrado.

Lado (cm)	Área
2	
3	
4	
5	

¿Es una situación proporcional? ______________________________

¿Por qué? ______________________________

En caso de que sí sea de proporcionalidad, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

____

Comenten sus conclusiones; recuerden que en los casos anteriores deben justificar si son o no proporcionales.

SESIÓN 3

MEDIDAS DE SUPERFICIE

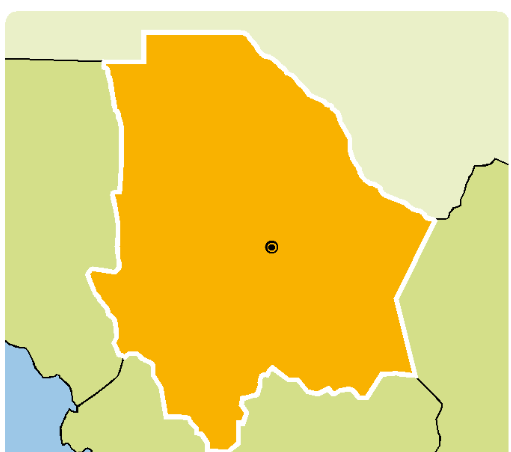
>>> Para empezar

¿Sabías que el estado más grande de la República Mexicana es Chihuahua? ¿Cuál crees que es su área?

a) 245 962 m^2.

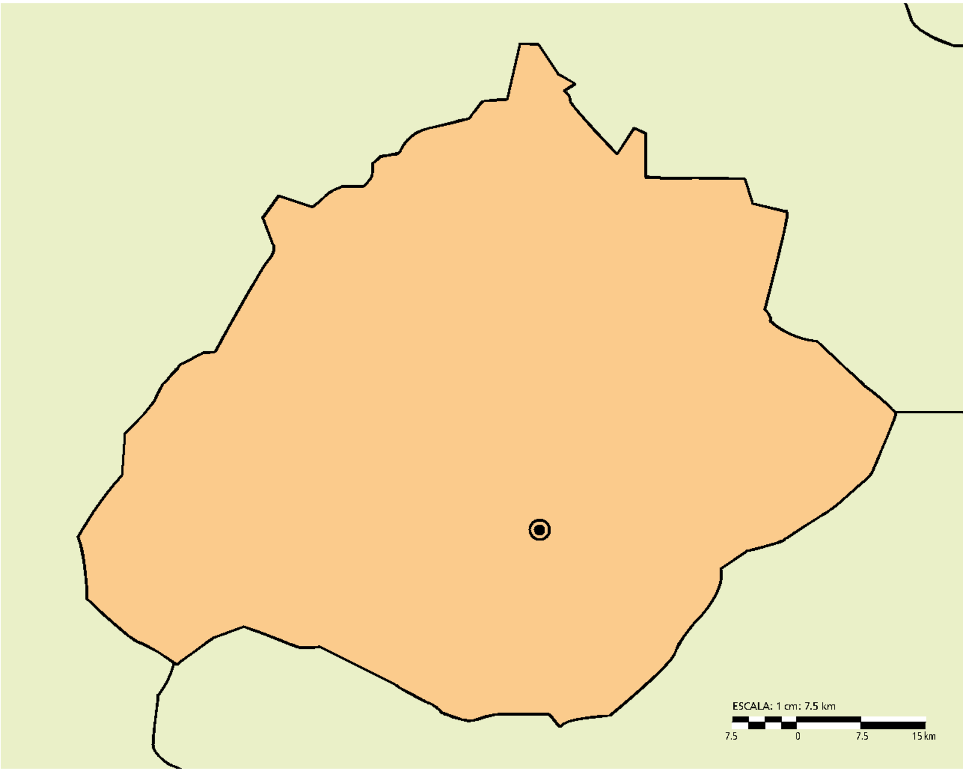
b) 245 962 cm^2.

c) 245 962 km^2.



>>> Consideremos lo siguiente

El siguiente es un mapa de Aguascalientes. Calculen aproximadamente su área considerando que cada centímetro equivale a 7.5 kilómetros.

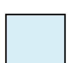


Describan a sus compañeros de grupo la estrategia que siguieron para resolver el problema. En particular, comenten la unidad de área más conveniente para expresar el resultado y las posibles razones de las diferencias entre resultados.

>>> Manos a la obra

I. Realicen lo que se pide.

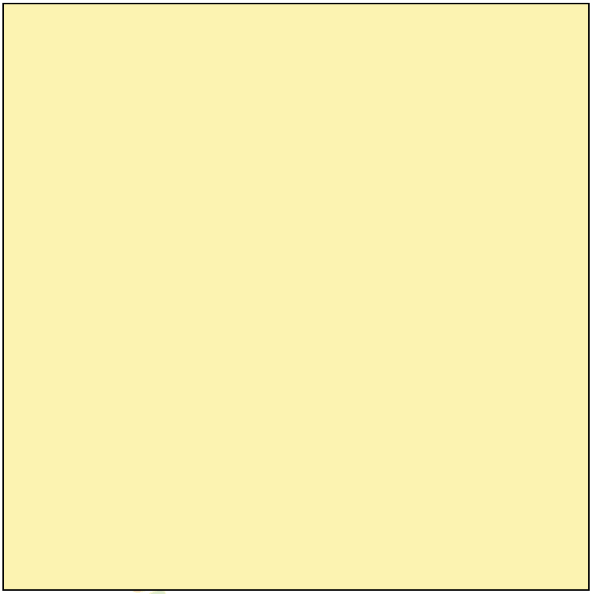
a) El siguiente es un centímetro cuadrado (1 cm^2); imaginen que lo dividen en cuadrados de un milímetro (1 mm) de lado, es decir, en milímetros cuadrados (mm^2).



- ¿A cuántos milímetros cuadrados equivale un centímetro cuadrado?

____

b) El siguiente es un decímetro cuadrado (dm^2). Divídanlo en centímetros cuadrados.



- ¿A cuántos centímetros cuadrados equivale un decímetro cuadrado?

- ¿A cuántos milímetros cuadrados equivale un decímetro cuadrado?

c) Peguen varias hojas de papel o consigan un pliego de papel grande y tracen y recorten un metro cuadrado (m^2). Luego divídanlo en decímetros cuadrados.

- ¿A cuántos decímetros cuadrados equivale un metro cuadrado?

- ¿A cuántos centímetros cuadrados equivale un metro cuadrado?

- ¿A cuántos milímetros cuadrados equivale un metro cuadrado?

Comenten y comparen sus resultados con sus compañeros.

II. Un hectómetro cuadrado (1 hm^2) es el área de un cuadrado que mide 100 metros de cada lado, también se llama hectárea (ha).

a) ¿Cuál es el área en metros cuadrados de una hectárea? ____________________

b) ¿Creen que en el patio de su escuela se pueda trazar una figura plana cuya superficie mida una hectárea? ____________________

c) Organícense en el grupo para que tracen en el patio una superficie de una hectárea. Si no se puede en el patio, calculen cuánto falta para la hectárea.

III. Un kilómetro cuadrado es el área de un cuadrado que mide 1 km o 1 000 m por lado.

¿A cuántas hectáreas equivale un kilómetro cuadrado? ____________________

IV. Completen la tabla.

El área de:	Unidad con la que crees que se debe medir
Un estado	km^2
Una tela	
	dm^2
	ha

>>> Para terminar

El área se mide en unidades cuadradas, por ejemplo:

Kilómetros cuadrados (km^2)
Hectáreas (ha)
Metros cuadrados (m^2)
Centímetros cuadrados (cm^2)
Milímetros cuadrados (mm^2)

Algunas equivalencias entre las unidades de área son:

$1\ km^2 = 100$ ha
1 ha $= 10\ 000\ m^2$
$1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2$

Medidas de superficie

Las unidades de superficie y sus conversiones son muy útiles para la resolución de algunos problemas prácticos relacionados con el cálculo de áreas de terrenos, extensiones territoriales, etc., de ahí la importancia que tiene conocerlas y comprender su uso.

>>> Para saber más

Sobre la superficie de los estados consulten:
http://cuentame.inegi.gob.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Porcentajes

En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que impliquen el cálculo de porcentajes utilizando de manera adecuada las expresiones fraccionarias o decimales.

SESIÓN 1

MÉXICO EN EL INEGI

>>> Para empezar

Los porcentajes aparecen en distintos contextos de la vida cotidiana, por ejemplo: se usan para calcular descuentos en la compra de artículos, para saber los intereses que cobra un banco por algún préstamo, para presentar datos estadísticos y para muchas otras cosas más.

En la secuencia 7 de tu libro de *Matemáticas I, volumen I* conociste algunos datos acerca de la población en México; una de las principales fuentes de información la proporciona el INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática). Este instituto se encarga de obtener datos por medio de los censos que realiza.

Conocer algunas características de la población ayuda a comprender mejor los problemas que tiene el lugar en el que vives.

>>> Consideremos lo siguiente

La población de la República Mexicana es de aproximadamente 110 000 000 habitantes y tiene una extensión territorial de alrededor de 2 000 000 de kilómetros cuadrados.

En los datos del INEGI se encontró que el estado de Chihuahua ocupa 13% del territorio nacional.

¿Cuál es la extensión territorial (en km^2) del estado de Chihuahua? ________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo de otra escuela dijeron que13% de 2 000 000 es:

$$2\,000\,000 \text{ km}^2 \times 1.3 = 2\,600\,000 \text{ km}^2$$

a) ¿En qué se equivocaron en el equipo de la otra escuela?

____

b) ¿Por qué número debieron multiplicar en la otra escuela?

____

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo encontraron el número por el cual se deben multiplicar los 2 000 000 de kilómetros cuadrados para obtener 13% de éstos?

II. Completen la siguiente tabla para encontrar la extensión territorial que ocupa el estado de Chihuahua.

Porcentaje de la extensión territorial	Extensión territorial (km²)
100%	2 000 000
1%	
13%	

Tabla 1

Comparen sus tablas y comenten:

a) ¿Por qué número hay que dividir los 2 000 000 de kilómetros cuadrados para obtener 1% de la extensión territorial del país?

---

b) ¿Por qué número hay que multiplicar los 2 000 000 de kilómetros cuadrados para obtener 13% de la extensión territorial del país?

III. Completen la siguiente tabla para saber el porcentaje que representan del total de la extensión territorial del país algunos estados de la República Mexicana.

Nombre del estado	Porcentaje que representa del total del territorio nacional	Territorio que ocupa (km²)
Aguascalientes	1%	
Tamaulipas	9%	
Oaxaca	5%	

Tabla 2

>>> A lo que llegamos

El porcentaje se puede calcular de varias maneras. Por ejemplo, para calcular 18% de la extensión territorial del país se pueden hacer las siguientes multiplicaciones:

- $2\,000\,000 \text{ km}^2 \times \frac{18}{100} = 360\,000 \text{ km}^2$, o bien
- $2\,000\,000 \text{ km}^2 \times 0.18 = 360\,000 \text{ km}^2$

También se puede completar la siguiente tabla:

Porcentaje de la extensión territorial	Extensión territorial (en km^2)
100 %	2 000 000
1 %	20 000
18 %	360 000

$\times \frac{18}{100}$

$\div 100$

$\times 18$

IV. En los datos del INEGI se encontró que el Distrito Federal tiene aproximadamente 8 800 000 habitantes.

Del total de la población del país, ¿cuál es el porcentaje que representa el Distrito Federal?

____

Para encontrar el porcentaje de habitantes que tiene el Distrito Federal respecto del total de la población del país, pueden usar un diagrama como el siguiente:

110 000 000	×	________	=	8 800 000
Número de habitantes del país		Número buscado		Número de habitantes del Distrito Federal

Luego hagan la siguiente división

$$\text{Número buscado} = \frac{8800000}{110000000} =$$

Finalmente, escriban el número que obtuvieron como una fracción con denominador 100.

$$\text{Número buscado} = \frac{\quad}{100}$$

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Para saber el porcentaje que representan los 8 800 000 habitantes que hay en el Distrito Federal respecto del total de la población, se puede hacer lo siguiente:

Dividir 8 800 000 entre 110 000 000

$$\frac{8\ 800\ 000}{11\ 000\ 0000} = 0.08 = \frac{8}{100}$$

Entonces 8 800 000 habitantes representan 8% de los 110 000 000 de habitantes que hay en el país.

V. Completen la siguiente tabla para saber qué porcentaje representa el número de habitantes de los estados que en ella aparecen:

Nombre del estado	Número de habitantes que tiene	Porcentaje que representa respecto del total de la población
Sonora	2 200 000	
Distrito Federal	8 800 000	8%
Jalisco	6 600 000	

Tabla 3

EL IVA

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En México se deben pagar impuestos al gobierno por algunos de los servicios y productos que se consumen. Por ejemplo, por el teléfono y la gasolina se paga el Impuesto al Valor Agregado (IVA), que es 15% del valor del producto o servicio.

El total a pagar por un producto con IVA es: el precio del producto más 15% del precio. Completen la siguiente tabla para calcular el total a pagar por algunos productos.

Producto	Precio del producto sin IVA (en pesos)	IVA a cobrarse (en pesos)	Cantidad total a pagar por el producto con IVA (en pesos)
	2 100		
	500		
		15	
		45	

Tabla 1

a) Completen la siguiente tabla para encontrar el precio del taladro:

Porcentaje	Cantidad correspondiente al porcentaje
15%	$45
1%	
100%	

Tabla 2

Comparen sus resultados y comenten:

¿Por qué el 100% del precio del taladro es el precio del taladro?

b) En su cuaderno hagan una tabla como la anterior para encontrar el precio de la licuadora.

Cuando se conoce un porcentaje del precio de un producto, se puede encontrar el precio o el 100% usando tablas. Por ejemplo, si se sabe que 17% del precio de una radiograbadora son $85.00, se completa la siguiente tabla:

Porcentaje	Cantidad correspondiente al porcentaje
17 %	$ 85.00
1 %	$ 5.00
100 %	$ 500.00

Entonces, el precio de la radiograbadora es de $500.00. Éste es 100% del precio.

Consideremos lo siguiente

La ilustración que se muestra es una copia de un recibo telefónico en la que faltan algunas de las cantidades que se cobraron.


MEXTEL
MEXTEL S.A. de C.V.

GONZALEZ YEDRA ENRIQUE VINICIO

CLL 4 7 PIRAMIDE/1 DE MAYO ALCE BLANCO C.P. 53370

Estado de Cuenta

Renta	166.95
Larga distancia internacional	
Larga distancia nacional	230.00
Llamadas a celulares	150.35
Llamadas extra	122.65
Subtotal del mes	
IVA	
Total a pagar	**2 300.00**

El subtotal del mes es el costo del servicio telefónico. En el recibo telefónico de la ilustración anterior aparece la cantidad total a pagar, pero no cuánto se está pagando de IVA. Respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto dinero se está cobrando por el IVA en el recibo telefónico de la ilustración?

b) ¿Cuánto es el subtotal del mes?

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Un equipo de otra escuela hizo lo siguiente para responder las preguntas anteriores:

Total a pagar con IVA (\$2 300) = subtotal del mes + 15% del subtotal del mes =

= 115% del subtotal del mes.

Luego hicieron la siguiente tabla para encontrar el subtotal del mes y el IVA. Complétenla ustedes:

Porcentaje	Cantidad correspondiente al porcentaje (en pesos)
115%	2 300
1%	20
100%	
15%	

Éste es el subtotal del mes

Éste es el IVA que se pagó

Comenten en grupo lo siguiente

a) ¿Ustedes usaron algún procedimiento parecido?

b) ¿Es cierto que el total a pagar es igual a 115% del subtotal del mes?

Verifiquen los resultados de la tabla con los que ustedes obtuvieron.

II. Si de larga distancia nacional se está cobrando en total \$230.00 incluyendo el IVA, ¿cuánto es de larga distancia nacional sin IVA? ______________________

>>> A lo que llegamos

Como habrás notado en los problemas de esta sesión, no todos los porcentajes son menores a 100. En la vida diaria encontramos porcentajes mayores que 100%. Por ejemplo, cuando se paga un producto o servicio que tiene el impuesto del IVA, en realidad se está pagando el 115% del precio original del producto.

>>> Lo que aprendimos

1. En su cuaderno resuelvan los siguientes problemas.

   a) Pedro compró una chamarra y le cobraron $575.00. Este precio ya tiene el IVA incluido. ¿Cuál es el precio de la chamarra sin el IVA?

   b) El precio de un pantalón es de $287.50 ya con el IVA incluido. ¿Cuál es el precio del pantalón sin el IVA?

2. Los productos de la siguiente tabla tienen distintos porcentajes de descuento. Completen la tabla.

Producto	Precio original del producto (pesos)	Descuento	Precio con el descuento (pesos)
	150	10%	
	300		255
		22%	330

SESIÓN 3

MISCELÁNEA DE PORCENTAJES

>>> Para empezar

Los migrantes

Una fuente importante de dinero que ingresa a México son las remesas. Las remesas son el dinero que envían los migrantes mexicanos a sus familiares o amigos y provienen principalmente de los Estados Unidos de América.

En la secuencia 10, **La jaula de oro**, del libro de Español I, volumen II estudiarás algunos de los aspectos de los migrantes mexicanos que viven en los Estados Unidos de América.

>>> Lo que aprendimos

1. Pedro es un migrante mexicano que vive en los Estados Unidos. Quiere mandar dinero a sus familiares y encontró la siguiente información en un cartel:

Existe una gran cantidad de opciones para realizar envíos de dinero de Estados Unidos a México. Como el costo y las características del envío varían según la empresa que utilices, es muy importante comparar opciones antes de enviar tu dinero.

Es común que los envíos de dinero se hagan por cantidades fijas de 300 dólares. En la tabla de abajo se compara la cantidad de dinero que entregan en México algunas de las principales empresas al enviar 300 dólares desde Estados Unidos.

Envíos de 300 dólares

Nombre de la empresa	Pesos entregados en México por 300 dólares enviados desde EUA
Northwestern Union	3 299.40
Cash Gram	3 291.32
Commission Express	3 290.84
Cash-check	3 213.52

Notas:

1. La cotización de referencia, al 25 de octubre de 2004, es de \$11.70, es decir, 1 dólar equivale a \$11.70.
2. Como las condiciones y costos de cada empresa varían, se recomienda consultar directamente con las instituciones de su preferencia.
3. Los envíos están estandarizados en 300 usd por envío, es decir, hay que enviar exactamente esta cantidad de dinero en cada envío.

Para calcular cuánto le cobra Northwestern Union por el envío, Pedro hizo lo siguiente:

$$300 \text{ dólares} \times \$11.70 = \$3\,510$$

$$\$3\ 510 - \$3\ 299.40 = \$2\ 10.60$$

Contesten:

a) ¿Qué porcentaje del dinero enviado cobra esta empresa? ______________________

b) Completen la siguiente tabla para determinar el porcentaje del dinero enviado que cobran estas empresas.

Nombre de la empresa	Pesos recibidos por 300 dólares	Porcentaje que cobra la empresa
Northwestern Union	3 299.40	
Cash Gram	3 291.32	
Commission Express	3 290.84	
Cash-check	3 213.52	

c) ¿Cuál es la empresa que cobra menor porcentaje? ____________________

2. Un productor de piñas vende su cosecha al distribuidor en $0.75 el kilogramo. En el supermercado se venden en $4.50 el kilogramo.

a) Si el kilogramo de piña se hubiera vendido en el supermercado al doble de su precio original (es decir, a $1.50), ¿en qué porcentaje se habría incrementado el precio del kilogramo de piñas? ____________________

b) Si el kilogramo de piña se hubiera vendido en el supermercado al triple de su precio original (es decir, a $2.25), ¿en qué porcentaje se habría incrementado el precio del kilogramo de piñas? ____________________

Completen la siguiente tabla para encontrar el porcentaje en que se incrementará el precio de las piñas.

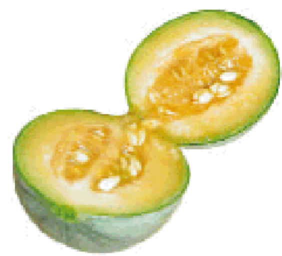
Precio al que el supermercado vende el kilogramo de piña	Porcentaje de incremento en el precio respecto al precio original
\$1.50	
\$3.00	
\$4.50	

3. Un productor de melones vendió su cosecha al distribuidor en \$1.40 el kilogramo. El distribuidor vendió el kilogramo de melón en \$350% de su precio original. ¿En cuánto se vendió el kilogramo? ____________________

a) Si 11% del precio de un aparato telefónico es \$27.50, ¿cuál es el precio del aparato telefónico? ____________________

b) Si 25% del precio de un libro es \$37.50, ¿cuál es el precio del libro?

____



>>> Para saber más

Sobre la población, las extensiones territoriales y algunas otras características de los estados de la República consulta:
http://www.inegi.gob.mx [Fecha de consulta: 28 de julio de 2006].
Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Sobre los envíos de dinero de los Estados Unidos de América a la República Mexicana consulta:
http://www.condusef.gob.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Ruta: Información sobre otros sectores centros cambiarios.
Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros. (Condusef).

Debes tomar en cuenta la comisión y el tipo de cambio que cada compañía te ofrece; mientras más elevada sea la comisión y más bajo el tipo de cambio, menor será la cantidad de dinero que reciban los beneficiarios.

Tablas de frecuencia

En esta secuencia interpretarán y comunicarán información mediante la lectura, descripción y construcción de tablas de frecuencia absoluta y relativa.

SESIÓN 1

¿QUIÉN LLEGÓ PRIMERO?

>>> Para empezar

Un recorrido por el origen de la estadística

Para presentar un número pequeño de datos basta con enunciarlos o enumerarlos ordenadamente. Por ejemplo, las calificaciones de un alumno en los 5 bimestres de Matemáticas son: 10.0, 9.0, 9.0, 8.0, 8.0.

Sin embargo, cuando el número de datos es grande, conviene recurrir a una tabla de frecuencias para poder hacer un análisis más completo o para tener una idea más clara de la información obtenida.

>>> Consideremos lo siguiente

Los alumnos de primer grado de una escuela secundaria participaron en una competencia de atletismo.

A continuación se presentan los tiempos, en segundos, que hicieron 30 alumnos en la carrera de 1 000 metros y el grupo al que pertenece cada uno.

320 (1°C)	350 (1°B)	330 (1°A)	300 (1°C)	340 (1°B)
330 (1°A)	340 (1°C)	360 (1°B)	320 (1°A)	330 (1°C)
300 (1°B)	320 (1°A)	350 (1°C)	330 (1°B)	340 (1°C)
340 (1°B)	330 (1°B)	340 (1°A)	340 (1°C)	320 (1°A)
320 (1°A)	340 (1°A)	320 (1°C)	360 (1°A)	300 (1°B)
330 (1°B)	360 (1°C)	340 (1°B)	350 (1°C)	340 (1°A)

a) ¿Cuánto tiempo registró el ganador de la carrera? ______________________

b) ¿Qué diferencia de tiempo hay entre el primero y el último lugar de la carrera?

____

c) ¿Cuál es el tiempo en el que se registró el mayor número de alumnos que terminaron la competencia? ______________________

d) Considerando los resultados por grupo, ¿en cuál hubo más alumnos que terminaron antes de 340 segundos? ______________________

Comenten qué grupo consideran que tuvo mejor desempeño en la competencia y por qué. Además, digan cómo organizaron los datos para responder las preguntas.

¿A cuántos minutos equivale el tiempo registrado por el primer lugar?

>>> Manos a la obra

I. Una forma de organizar y presentar los resultados de la competencia es mediante una tabla de frecuencias. Contesten las siguientes preguntas para construirla.

a) ¿A qué se refieren los datos que aparecen en el listado anterior? ______________

____

b) ¿Cuántos grupos participaron en la competencia? ______________

c) ¿Cuáles fueron esos grupos? ______________

d) ¿Cuántos tiempos diferentes se registraron en la competencia? ______________

e) ¿Cuáles fueron esos tiempos? ______________

f) Completen la siguiente tabla de frecuencias.

Recuerden que:
La frecuencia es el número de veces que aparece cada valor.

Tabla de frecuencias del tiempo realizado en la carrera de 1 000 metros por grupo

Tiempos	Grupos						Total
	1° A		1° B		1° C		
	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia	Conteo	Frecuencia	
300		0					
					II	2	
340			III	3			9
350							
							3

II. Usen la información que proporciona la tabla para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue el mejor tiempo que se registró en el grupo 1° A en la carrera? ________ ________ ¿A cuántos minutos corresponde ese tiempo? ________

b) ¿Cuántos alumnos de 1° A hicieron menos de 340 segundos? ________

c) ¿Cuántos alumnos de 1° A llegaron a la meta en 330 segundos? ________

d) ¿Cuántos del 1° B? ________ ¿Y cuántos del 1° C? ________

e) Considerando los resultados de los tres grupos, ¿cuál es el tiempo registrado en que más alumnos llegaron juntos a la meta? ________ Compara ese tiempo con el más frecuente por grupo, ¿en qué caso o casos fue diferente?

____

III. Consideren las siguientes afirmaciones y marquen el cuadro de la **"V"** si es verdadera o el de la **"F"** si es falsa, a partir de la información que proporciona la tabla de frecuencias.

	V	F
• En el grupo de 1° B hubo más alumnos que hicieron 330 que 340 segundos.	☐	☐
• Hay más alumnos de 1° C que de 1° A que hicieron menos de 320 segundos.	☐	☐
• En total, hay más alumnos que lograron llegar en primer lugar que en último lugar.	☐	☐

>>> A lo que llegamos

Una **tabla de frecuencias** es una forma de resumir datos. En ella se presentan en orden creciente los valores observados, así como sus respectivas frecuencias.

El organizar los datos en una **tabla de frecuencias** permite contar con una visión global e inmediata del comportamiento de la situación que se analiza.

Por ejemplo, en la tabla se observa fácilmente cuántos alumnos lograron el primer lugar y a qué grupo pertenecen, lo cual no ocurre con el listado de números.

La suma de las frecuencias absolutas siempre es igual que el total de los datos considerados, es decir, que la población, en este caso los 30 alumnos que participaron en la competencia.

>>> Lo que aprendimos

La edad y el sexo de un grupo de personas que se encuentran en una reunión son los siguientes:

38 (M)	8 (M)	68 (H)	17 (H)	11 (M)	33 (H)
15 (M)	45 (H)	10 (H)	57 (H)	27 (M)	23 (M)
20 (H)	45 (H)	20 (M)	25 (M)	40 (H)	8 (M)
23 (H)	49 (M)	33 (H)	27 (H)	48 (H)	10 (H)
28 (M)	31 (M)	36 (M)	5 (H)	39 (H)	45 (M)
45 (H)	23 (H)	45 (M)	8 (H)	48 (M)	20 (M)
33 (M)	22 (H)	55 (M)	33 (H)	45 (H)	40 (H)
52 (M)	15 (M)	5 (H)	65 (M)	3 (M)	15 (H)
15 (M)	8 (M)				

a) En su cuaderno, organicen los datos en una tabla de frecuencias. Decidan cuál información va en las columnas y cuál en los renglones. Pónganle el título a la tabla y a cada una de las columnas.

b) ¿Cuántas personas asistieron a la reunión? ________________

c) ¿Qué hubo más, hombres o mujeres? ________________

d) De las personas que asistieron, ¿cuál fue la edad más frecuente? ________

e) ¿Cuántas personas del grupo tenían de 20 a 29 años? ________ Y de ese grupo de edades, ¿qué hubo más, hombres o mujeres? ________________

f) ¿Cuántas personas eran mujeres y tenían menos de 40 años? ________

TABLA DE FRECUENCIAS RELATIVAS

>>> Para empezar

En la sesión anterior construiste la tabla de frecuencias de la siguiente situación.

La edad y el sexo de un grupo de personas que se encuentran en una reunión son las siguientes:

38 (M)	8 (M)	68 (H)	17 (H)	11 (M)	33 (H)
15 (M)	45 (H)	10 (H)	57 (H)	27 (M)	23 (M)
20 (H)	45 (H)	20 (M)	25 (M)	40 (H)	8 (M)
23 (H)	49 (M)	33 (H)	27 (H)	48 (H)	10 (H)
28 (M)	31 (M)	36 (M)	5 (H)	39 (H)	45 (M)
45 (H)	23 (H)	45 (M)	8 (H)	48 (M)	20 (M)
33 (M)	22 (H)	55 (M)	33 (H)	45 (H)	40 (H)
52 (M)	15 (M)	5 (H)	65 (M)	3 (M)	15 (H)
15 (M)	8 (M)				

Sin embargo, esta información se puede presentar de otra manera, en la que las edades se agrupan en intervalos y se dan las frecuencias absoluta y relativa y el porcentaje de cada intervalo.

>>> Consideremos lo siguiente

En las siguientes tablas faltan algunos datos, realicen los cálculos necesarios y completen:

Edad (años)	Hombres			
	Frecuencia	Frecuencia relativa		Porcentaje
		Fracción	Decimal	
0-9	3	$\frac{3}{25}$		12%
10-19	4	$\frac{4}{25}$		16%
20-29	5	$\frac{5}{25}$	0.20	20%
30-39	4	$\frac{4}{25}$		16%
40-49	7	$\frac{7}{25}$		28%
50-59	1	$\frac{1}{25}$	0.04	4%
60-69	1	$\frac{1}{25}$		4%
Total	25	$\frac{25}{25}$	1	100%

Edad (años)	Mujeres			
	Frecuencia	Frecuencia relativa		Porcentaje
		Fracción	Decimal	
0-9	4			
10-19				16 %
20-29	6			
30-39				
40-49		$\frac{4}{25}$	0.16	
50-59				8 %
60-69		$\frac{1}{25}$		
Total				100 %

a) ¿Cuántas personas son menores de 20 años? ____________

b) ¿Qué significa que la frecuencia relativa de hombres entre 20 y 29 años sea $\frac{5}{25}$?

____

c) De las mujeres que asistieron a la reunión, ¿qué porcentaje tiene entre 30 y 39 años de edad? ____________

d) ¿Qué porcentaje de hombres y mujeres tiene 50 años o más? ____________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Usen la información que proporcionan las tablas para contestar las siguientes preguntas.

Recuerden que:
Si divides la frecuencia entre el número total de observaciones, obtienes la frecuencia relativa.

a) ¿Cuántos intervalos de edades se formaron? ____________

b) ¿Cuántos hombres hay en la reunión? ______ ¿Y cuántas mujeres? ______

c) ¿Cuántos de los hombres que están en la reunión tienen entre 40 y 49 años de edad? ____________

d) ¿Qué parte del total de hombres tiene entre 40 y 49 años de edad? ______

e) Uno de los valores de la tabla es $\frac{5}{25}$, ¿qué representa el número 5? ______

¿Y el 25? ____________

>>> A lo que llegamos

A la fracción $\frac{5}{25}$ se le llama frecuencia relativa e indica la parte del total de la población que tiene un mismo atributo o característica.

f) De las mujeres que había en la reunión, ¿cuál es la frecuencia relativa de las que tienen entre 30 y 39 años de edad? ____________________

g) La frecuencia relativa de mujeres que tienen entre 40 y 49 años es $\frac{4}{25}$. Esta fracción expresada como decimal es 0.16, ¿qué significa este decimal en esta situación? ____________________

h) ¿De qué manera expresarían como porcentaje la frecuencia relativa 0.16? ____________________

____

i) ¿Cuánto suman las frecuencias relativas correspondientes a las mujeres que asistieron a la reunión? ____________________

j) ¿En dónde hay más mujeres, en 4% de las mujeres de 60 a 69 años o en las 4 mujeres de 40 a 49? ____________________

>>> A lo que llegamos

La **frecuencia relativa** también puede expresarse en forma de número **decimal** y **porcentaje**.

II. Utilicen la información que presentan las dos tablas anteriores para completar la siguiente tabla que agrupa todos los resultados.

Edad (años)	Total hombres y mujeres			
	Frecuencia	Frecuencia relativa		Porcentaje
		Fracción	Decimal	
0-9				
10-19				
20-29				
30-39				
40-49				
50-59				
60-69				
Total	50			100%

a) ¿Qué porcentaje de personas que tienen entre 30 y 39 años de edad fueron a la reunión? ____________________

b) De las personas de entre 30 y 39 años de edad que había en la reunión, ¿son más hombres o más mujeres? ____________ ¿En qué tablas encuentran esta información? ____________________

c) ¿Cuál es la suma de frecuencias relativas de hombres y mujeres que asistieron a la reunión? ____________________

d) En total, ¿cuántas personas menores de 20 años asistieron a la reunión? ________ ¿Qué porcentaje representan? ____________________

>>> A lo llegamos

Cuando se trata de presentar información estadística, las tablas que generalmente se utilizan son de frecuencias relativas con porcentaje. La frecuencia relativa de un valor observado es el cociente entre su frecuencia y el total de observaciones realizadas. El porcentaje de veces que aparece un determinado valor observado se obtiene multiplicando su frecuencia relativa por 100.

La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de los datos u observaciones.

La suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

La suma de los porcentajes es igual a 100.

>>> Lo que aprendimos

Completa la tabla de frecuencias relativas y de porcentaje para los datos de la carrera de 1 000 metros, presentada en la sesión 1 de esta secuencia.

Tiempo registrado en segundos	Frecuencia	Frecuencia relativa		Porcentaje %
		Fracción	Decimal	
300	3			
320	6			
330	6			
340	9			
350	3			
360	3			
Total	30			

a) ¿A qué tiempo registrado corresponden cada una de las siguientes frecuencias relativas?

30% ____________________ 0.3 ____________________

0.1 ____________________ $\frac{3}{30}$ ____________________

b) ¿Cuál es la frecuencia relativa de alumnos que llegaron a la meta antes de 330 segundos? ____________________

c) ¿Qué porcentaje de alumnos que participaron en la carrera hicieron menos de 320 segundos? ____________________

SESIÓN 3

LA TABLA REPRESENTA...

>>> Para empezar

Como habrás observado, en tu clase de **Geografía de México y del mundo**, es frecuente que se presente información en tablas; por ejemplo, en la secuencia 7 **¿Cómo es y dónde está la población?**

>>> Lo que aprendimos

1. La matrícula en educación básica se refiere al número de alumnos inscritos en instituciones educativas de preescolar, primaria y secundaria en un ciclo escolar determinado.

Analicen la información que presenta la siguiente tabla y complétenla. Pueden utilizar una calculadora.

Matrícula en Educación Básica por nivel educativo y por sexo en los años 1992 y 2002

Año	1992		2002	
Nivel educativo y sexo	**Total**	**Porcentaje**	**Total**	**Porcentaje**
Preescolar	2 858 890	100%	3 635 903	100%
Hombres	1 439 632	50.35%	1 836 121	51%
Mujeres	1 419 258		1 799 782	49%
Primaria	14 425 669	100%	14 857 191	100%
Hombres	7 429 429	51.50%	7 604 635	51.18%
Mujeres	6 996 240	48.50%	7 252 556	48.82%
Secundaria	4 203 098	100%	5 660 070	100%
Hombres	2 152 648	51.22%	2 862 463	
Mujeres	2 050 450		2 797 607	49.43%

Fuente: SEP, *Estadística Básica del Sistema Educativo Nacional. Inicio de cursos 1992-1993.*
SEP, DGPPP, Subdirección de Análisis Estadístico y Presupuestal 2003.

a) ¿Qué información les muestra la tabla? ______

b) ¿A qué años corresponde la información que presenta la tabla? ______

______

c) En el renglón que corresponde al nivel de Preescolar aparece dos veces la expresión "100%", ¿qué significa en cada caso? ______

______

d) ¿En cuál de los tres niveles es mayor la matrícula? ______

e) De 1992 a 2002 aumentó la matrícula en todos los niveles educativos. ¿Cuáles fueron los incrementos en cada uno de los tres niveles educativos? Escríbelos en tu cuaderno.

f) ¿En cuál de los tres niveles hubo un menor aumento? ______

g) ¿Y en cuál hubo un mayor aumento? ______

2. Con la información que presenta la tabla anterior, completen la siguiente tabla para que muestre la matrícula de la educación básica por sexo en los años 1992 y 2002.

Año	1992		2002	
Nivel educativo y sexo	**Total**	**Porcentaje**	**Total**	**Porcentaje**
Educación Básica				
Hombres				
Mujeres				

a) ¿Cómo obtienen el total de la matrícula para el año 1992? ______

b) ¿Y para el año 2002? ______

c) De 1992 a 2002, ¿cuál de los porcentajes de matrícula aumentó, el de los hombres o el de las mujeres?

______

3. En el examen que se aplicó en una escuela aprobaron 90 alumnos.

De acuerdo con esta información, sólo una de las siguientes afirmaciones es válida. Márquenla con una ✓

- [ ] El examen se aplicó a 100 alumnos.
- [ ] La mayoría de los alumnos aprobó el examen.
- [ ] El examen lo presentaron cuando menos 90 alumnos.
- [ ] El número de alumnos reprobados fue 10.

4. En el examen que se aplicó en una escuela la frecuencia relativa de los alumnos aprobados es $\frac{90}{100}$.

De acuerdo con esta información, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Márquenlas con ✓

- [ ] El examen se aplicó a 100 alumnos.
- [ ] La mayoría de los alumnos aprobó el examen.
- [ ] El examen lo presentaron cuando menos 90 alumnos.
- [ ] El número de alumnos reprobados fue 10.

5. Completen la siguiente tabla.

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia relativa		Porcentaje
		Fracción	Decimal	
0-9		$\frac{6}{60}$		
10-19	8			
20-29	6			
30-39	8			
40-49	4			
50-59	7			
60-69	3			
70-79	10			
80-89				5
90-99	5			
Total	60			

a) ¿A cuál de las siguientes tres situaciones puede corresponder esta tabla? Márquenla con una ✓

- ☐ Número de saltos que pueden dar en 10 segundos un conjunto de 60 personas.
- ☐ Número de pulsaciones por minuto que registró un conjunto de personas.
- ☐ Número de clientes que llegan a una tienda en ciertos intervalos de tiempo.

De acuerdo con el contexto de la situación que eligieron, respondan las siguientes preguntas

b) ¿Qué representa el intervalo 40-49? ______________________________

c) ¿Y el valor 10 de la columna de frecuencias? ______________________________

d) ¿Tiene sentido el valor 15.5? __________ ¿Por qué? __________________

____

e) ¿Qué representa la fracción $\frac{6}{60}$ de la columna de frecuencia relativa? ______

____

f) ¿Qué significa el número **5** de la columna de porcentajes? __________

____

>>> Para saber más

Sobre información que ofrece el INEGI para la utilización de tablas de frecuencia consulten: www.inegi.gob.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007]. Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática.

Gráficas de barras y circulares

En esta secuencia aprenderás a interpretar información representada en gráficas de barras y circulares de frecuencias absoluta y relativa, proveniente de diarios o revistas y de otras fuentes. También verás cómo comunicar información proporcionada por estudios sencillos, eligiendo la forma de representación más adecuada.

SESIÓN 1

QUÉ DICEN LAS GRÁFICAS

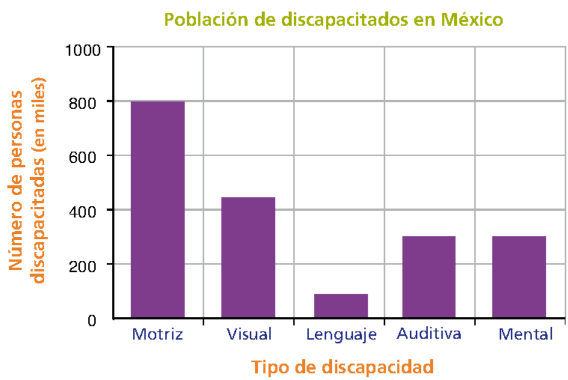
>>> Para empezar

Dos de las maneras más utilizadas para presentar información son la gráfica de barras y la gráfica circular. Debido a su forma sencilla, resultan muy útiles para representar los datos obtenidos en encuestas y estudios sobre diversos temas.

>>> Consideremos lo siguiente

Según el *XII Censo General de Población y Vivienda*, la población de México en el año 2000 era de 99 722 200 habitantes, de los cuales 1 795 000 presentaban al menos un tipo de discapacidad. Dicho censo consideró 5 tipos de discapacidad.

La siguiente gráfica muestra la cantidad de personas que padecen cada tipo de discapacidad.



Fuente: INEGI, *XII Censo General de Población y Vivienda 2000.*

a) ¿Cuál de las siguientes preguntas puede contestarse a partir de la información que proporciona la gráfica? Márquenla con una ✓

- [ ] ¿Cuántos niños padecen la discapacidad motriz?
- [ ] ¿Cuántas personas tienen discapacidad auditiva?

b) Escriban tres preguntas que se puedan contestar con la información que proporciona la gráfica.

Pregunta 1: ____________________

Pregunta 2: ____________________

Pregunta 3: ____________________

Lean al grupo una de las preguntas que escribieron y pidan que se las respondan.

>>> Manos a la obra

I. Observen la gráfica anterior y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son los tipos de discapacidad que reporta el XII Censo General de Población y Vivienda? ____________________

b) ¿Cuál es la discapacidad más frecuente en México? ____________ ¿Y la menos frecuente? ____________________

c) Un alumno dice que en México hay 800 personas con discapacidad motriz. ¿Es esto cierto? ____________ ¿Por qué? ____________________

____

d) En la gráfica hay cuatro tipos de discapacidades con al menos 300 000 personas, ¿cuáles son? ____________________

e) Completen la tabla de frecuencias que corresponde a la información que presenta la gráfica de barras.

Tipo de discapacidad	Número de personas
Total	

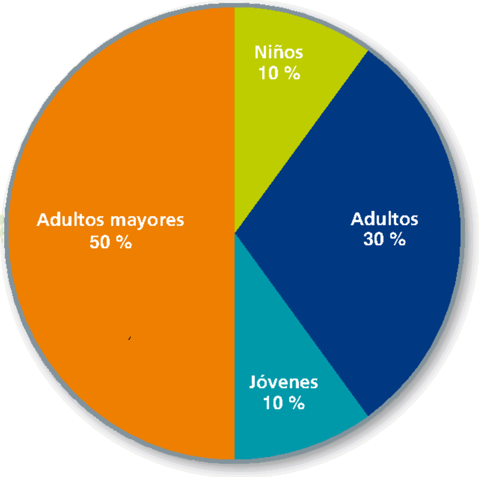
f) ¿El número total de personas discapacitadas que obtuvieron en la tabla es igual al que señala el INEGI de 1 795 000 personas? ______________________

g) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones justifica esta situación? Subráyenla.

- Existe un error en los datos que se recolectaron.
- El número de personas con discapacidad aumenta conforme a la edad.
- Una persona puede tener más de un tipo de discapacidad.

II. La siguiente gráfica muestra, según el grupo de edad, los porcentajes de personas en México que tienen discapacidad motriz.

Distribución de la población con discapacidad motriz por grupo de edad en porcentaje



Número total de personas con discapacidad motriz: 800 000

Fuente: INEGI, *XII Censo General de Población y Vivienda 2000.*

a) ¿Cuántas personas tienen discapacidad motriz en México? ______________________

b) ¿En cuáles grupos de edad se manifiesta más esta discapacidad? ______________________

____

Un alumno planteó la siguiente pregunta: ¿Habrá la misma cantidad de niños que de jóvenes con discapacidad motriz?

c) ¿Podrán contestar esta pregunta con la información que proporciona la gráfica? ______________________ ¿Cómo podrían saberlo? ______________________

d) Completen la tabla de frecuencias que corresponde a la información que presenta la gráfica circular.

Grupo de edad	Número de personas	Porcentaje
Total	800 000	100%

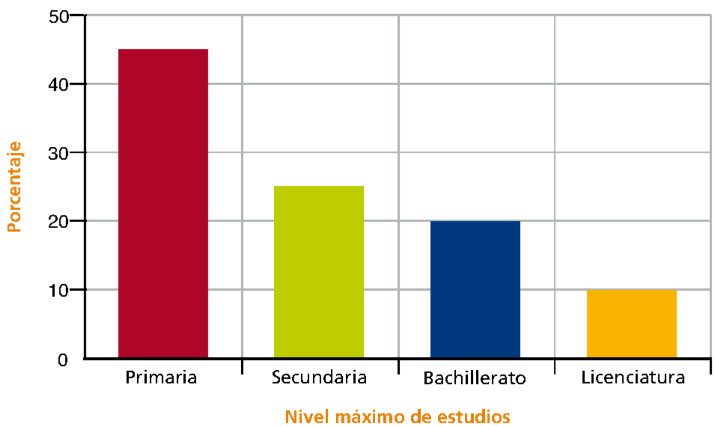
>>> A lo que llegamos

Las **gráficas de barras** y las **gráficas circulares** nos permiten comparar la forma en que se distribuyen los atributos o características en una cierta población o muestra, ya sea que los datos se expresen mediante frecuencias absolutas o relativas.

En el caso de que los datos de la gráfica estén expresados como frecuencias relativas y se conozca el total de la población, como es el caso de la gráfica circular anterior, es posible determinar con exactitud la frecuencia con que se observa cada uno de los atributos en la población.

>>> Lo que aprendimos

La siguiente gráfica presenta el resultado de una encuesta realizada a un grupo de 200 personas sobre su nivel máximo de estudios.



a) En tu cuaderno, elabora la tabla de frecuencias a partir de la información que proporciona la gráfica.

b) Según los datos registrados en la gráfica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? Subráyala con una línea roja.

- Un total de 10 personas tienen licenciatura como nivel máximo de estudios.
- De las personas encuestadas 30 tenían, como nivel máximo de estudios, secundaria o bachillerato.
- El 45% de las personas entrevistadas sólo terminaron la primaria.
- Menos de 20% de las personas encuestadas estudiaron hasta bachillerato.

SESIÓN 2

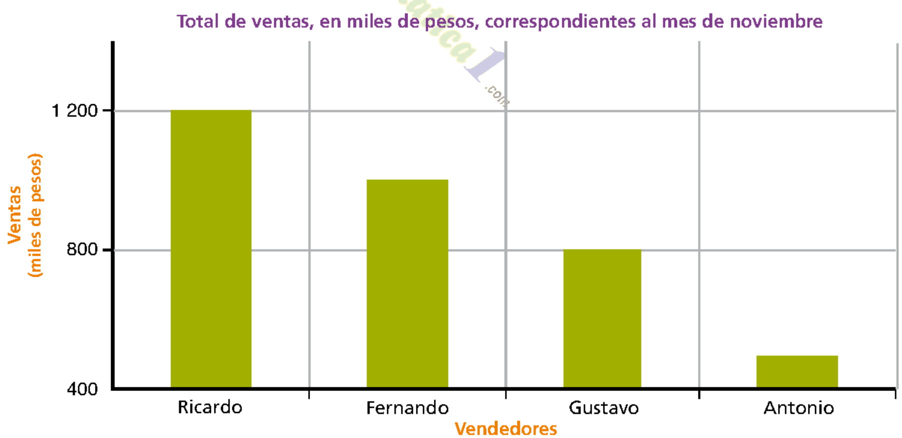
GRÁFICAS DE BARRAS

>>> Para empezar

Existen diversas situaciones en las que se requiere comparar valores, por ejemplo, cuando se trata de definir a un ganador o establecer el valor más frecuente.

>>> Consideremos lo siguiente

Una agencia de automóviles da un bono mensual al vendedor que logre hacer mayores ventas. Para motivar a los vendedores, se les muestra el número de autos que llevan vendidos y el monto de sus ventas. En cierto mes se presentó la siguiente gráfica:



El gerente le dijo a Gustavo que el importe de las ventas de otro vendedor es el doble de las que hizo él.

a) ¿En qué creen que se basa el gerente para hacer esa afirmación? ________________

b) ¿Es correcta?____________________________ ¿Por qué? ________________________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Con la información que proporciona la gráfica, respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el importe de las ventas de autos que hizo Gustavo? ______________________

____

b) ¿Y las de Ricardo? ____

c) ¿Cuántas veces más grande es el importe de las ventas de Ricardo que el importe de las ventas de Gustavo? ______________________________

d) ¿Cuántas veces más alta es la barra que representa las ventas de Ricardo que la barra que representa las ventas de Gustavo? ______________________

e) Si el importe de las ventas de un quinto vendedor fuera de $200 000, ¿qué cambios habría que hacer en la gráfica para representarla? ______________________

____

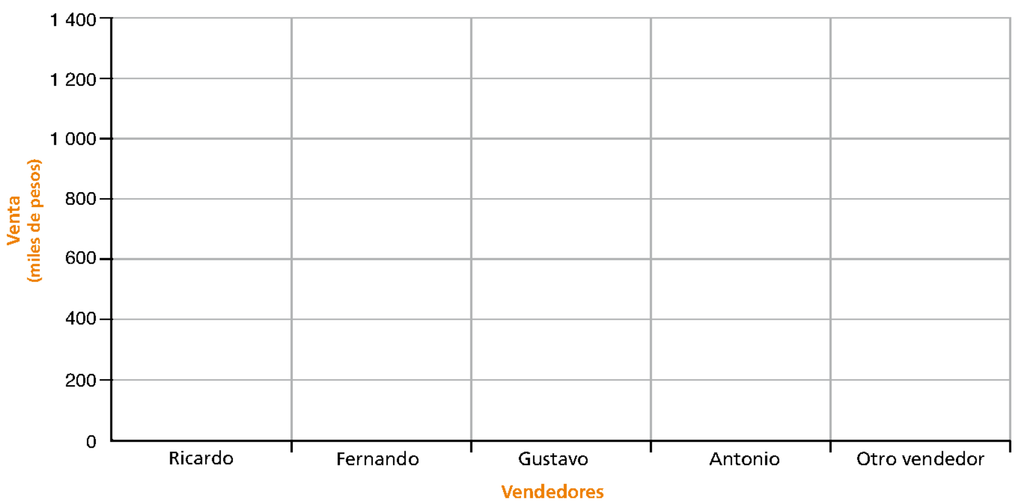
>>> A lo que llegamos

En una gráfica de barras, la altura de cada barra debe ser proporcional a la cantidad que representa.

Observa que en la gráfica anterior esto no ocurre. Para corregirla hay que considerar el eje de las ventas como una recta numérica que va de 0 a un valor máximo adecuado a la situación, y dividirla en un número conveniente de partes iguales.

II. Completen la siguiente gráfica de modo que incluya la venta del quinto vendedor.

Total de ventas, en miles de pesos, correspondientes al mes de noviembre



a) ¿A partir de qué valor empieza la escala que representa el importe de las ventas?

____

b) ¿Cuál es el máximo valor que está representado en esa escala? _______________

c) ¿En cuántas partes está dividida? _______________ ¿Qué valor representa cada parte? _______________

d) ¿La altura que representa la barra de Ricardo mide el doble de la de Gustavo? _______________ ¿Cuánto debió haber vendido Ricardo para que esto sucediera?

____

>>> A lo que llegamos

La **gráfica de barras** o **diagrama de barras** facilita la comparación de datos, al interpretar la altura o la longitud de las barras.

Cómo trazar una gráfica de barras:

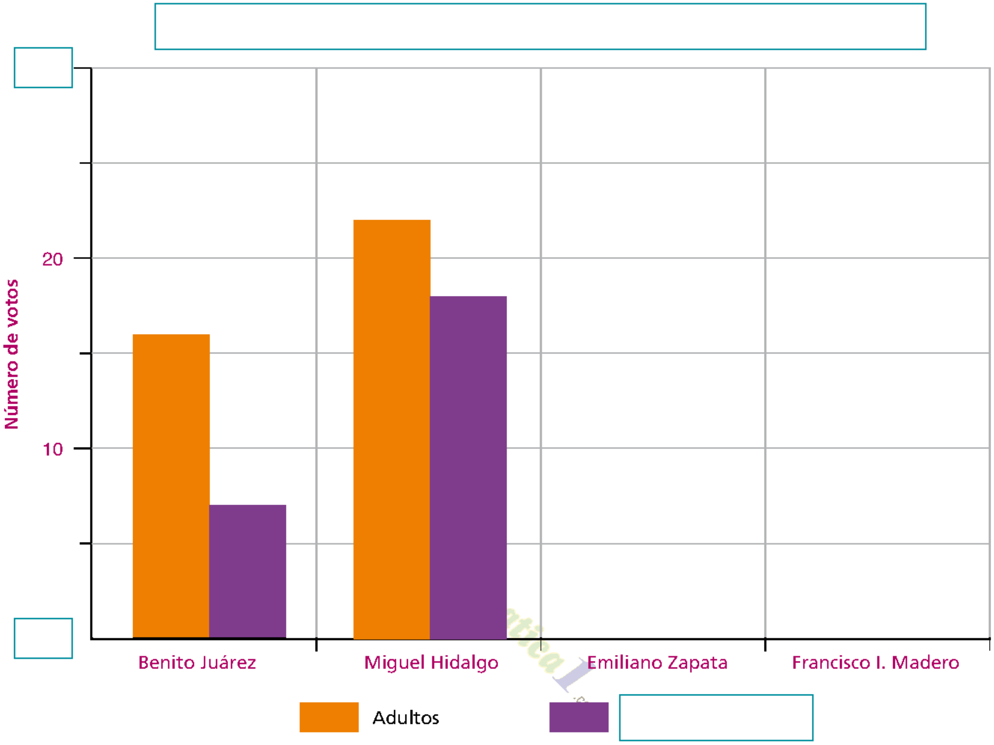
- Determinen el número de barras que necesitarán en el eje *x* (horizontal) para representar los datos, de acuerdo con el número de atributos o cualidades que se observan.
- A partir del origen, definan la escala en el eje *y* (vertical) considerando los valores mínimo y máximo que se proporcionan. Marquen la escala y anoten las unidades.
- Definan el ancho de las barras y el espacio que se dejará entre ellas. Marquen los anchos y rotulen las barras. Con la escala del eje *y* como referencia, tracen la altura de las barras.
- Asignen un título a la gráfica.

>>> Lo que aprendimos

1. Se le preguntó a un grupo de personas a cuál de los siguientes personajes les gustaría más haber conocido. La siguiente tabla muestra los resultados de la encuesta:

Personaje	Número de votos	
	Adultos	Niños
Benito Juárez	16	7
Miguel Hidalgo	22	18
Emiliano Zapata	24	31
Francisco I. Madero	9	15

Utiliza la información que presenta la tabla anterior para completar la siguiente gráfica de barras.



2. En la sesión 2 de la secuencia 22, aprendiste a construir las tablas de frecuencia. Utiliza la información de la tabla que presenta los resultados de la carrera de 1 000 m para construir, en tu cuaderno, la gráfica de barras que le corresponde.

a) Compárala con las que elaboren tus compañeros. ¿Eligieron el mismo tipo de escala?

_______________ ¿Por qué? ______________________________

b) ¿Qué título y etiquetas le pusieron? ______________________________

3. En la secuencia 10 **La jaula de oro**, de tu libro de *Español I, volumen II* estudiaste la migración a los Estados Unidos. Además, realizaste una encuesta.

a) Elabora una gráfica de barras con los datos que obtuviste en la pregunta: ¿Cuál es la actividad que desempeñan en los Estados Unidos?

b) ¿Qué escala utilizarás? ______________________________

SESIÓN 3

GRÁFICA CIRCULAR

>>> Para empezar

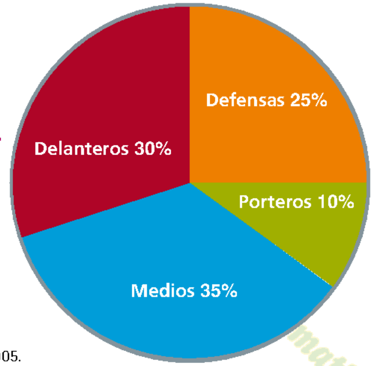
Durante el mes de septiembre de 2005, se llevó a cabo en Perú el Campeonato Mundial Juvenil Sub 17 de la FIFA, y el equipo mexicano resultó campeón. En esta sesión analizarás y presentarás estadísticamente algunas cifras relacionadas con este tema.

>>> Consideremos lo siguiente

Una revista deportiva presentó la siguiente información sobre los jóvenes futbolistas que se preparan para el próximo campeonato mundial Sub 17:

Tercera división profesional de futbol. Relación de menores nacidos en 1990 o más, por posiciones, al 7 de octubre de 2005.

740 jugadores registrados.



Fuente: Revista *Futbol Total*, 2005.

a) De los 740 jugadores registrados, ¿cuántos son delanteros? ______________________

b) ¿Y cuántos son porteros? ______________________

c) Hay 37 jugadores delanteros zurdos. Si se requiere que en la gráfica se distingan los delanteros diestros de los zurdos, ¿qué cambio debe hacerse en la gráfica? Contesten en su cuaderno.

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Observen la gráfica circular anterior y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué información proporciona? ______________________

b) ¿Cuál es la posición en la que hay más jugadores? ______________________

c) ¿Qué fracción de la gráfica representa el porcentaje de defensas? ______________________

d) ¿Cuántos jugadores defensas hay? ______________ ¿Qué fracción representan del total de jugadores registrados? ______________________

e) ¿Qué porcentaje representan los delanteros zurdos del total de jugadores registrados? ______________________

f) ¿Qué porcentaje le correspondería a los delanteros diestros? ______________________

g) ¿Cuánto es la suma de los porcentajes de delanteros zurdos y delanteros diestros? ______________________

h) ¿Cómo representarían el porcentaje de delanteros zurdos y el de delanteros diestros en la gráfica? ______________________

>>> A lo que llegamos

A la **gráfica circular** se le llama también **de pastel** o **diagrama de sectores.**

Cómo trazar una gráfica circular:

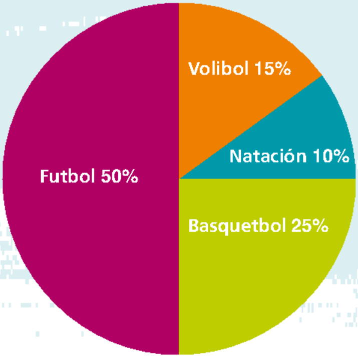
Deporte favorito	Frecuencia
Basquetbol	10
Futbol	20
Natación	4
Volibol	6
Total de alumnos	40

- Se calcula la fracción que corresponde a cada una de las preferencias por cada deporte. Por ejemplo, el basquetbol representa $\frac{10}{40}$, o sea $\frac{1}{4}$ de los votos totales.
- Se multiplica la fracción por los 360° que corresponden a todo el círculo. Por ejemplo, $\frac{1}{4} \times 360° = 90°$. Ésta es la medida del ángulo central que corresponde a la preferencia de basquetbol. Con este ángulo (90°) se traza el sector circular que representa la cantidad de personas a las que les gusta practicar el basquetbol.

  Así, se obtiene el ángulo para cada uno de los demás datos, como se muestra en la tabla:

Deporte	Cantidad de personas que lo prefieren	Frecuencia relativa (fracción del círculo)	Ángulo central de:
Basquetbol	10	$\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360° = 90°$
Futbol	20	$\frac{20}{40} = \frac{2}{4}$	$\frac{2}{4} \times 360° = 180°$
Natación	4	$\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} \times 360° = 36°$
Volibol	6	$\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$	$\frac{3}{20} \times 360° = 54°$
Total	40	$\frac{40}{40} = 1$	$1 \times 360° = 360°$

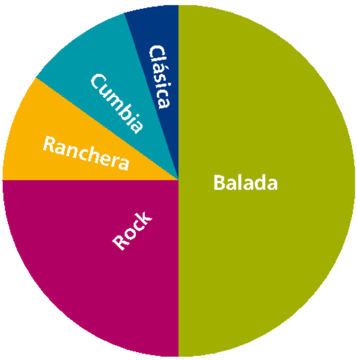
- Se traza el círculo y se marcan los ángulos centrales.
- Se nombran las partes de la gráfica.
- Se anota el título de la gráfica circular.



Preferencias de deporte que les gusta practicar a los alumnos de 1°

II. Se aplicó una encuesta a un grupo de alumnos, y con los datos obtenidos se elaboró la siguiente gráfica.

Tipo de música que prefieren los alumnos de primero.



a) ¿Qué tipo de música es el que más le gusta a los alumnos? ______________________

b) ¿Qué fracción de la gráfica representa? ______________

c) Expresado en porcentaje, ¿cuánto le corresponde? __________

d) ¿A qué porcentaje de los alumnos de primero les gusta el rock? ______________________

e) ¿Qué relación encuentran entre los alumnos a los que les gusta escuchar la música ranchera y a los que les gusta la cumbia? ______________________

f) ¿Qué fracción de la gráfica representa a los que prefieren música clásica, si se sabe que es la mitad de los que prefieren música ranchera? ______________________

El rating *en la televisión*

La medida que se utiliza para conocer la aceptación de un programa de televisión por parte de los televidentes se llama *rating*, y existen diferentes formas de medirlo. Con esta medida las televisoras definen, entre otras cosas, el horario de transmisión de los programas y su duración.

>>> Lo que aprendimos

1. En la sesión 3 de la secuencia 22, **Tablas de frecuencia absoluta y relativa**, completaste la siguiente tabla.

Matrícula en Educación Básica por nivel educativo y por sexo (1992 y 2002)				
Año	**1992**		**2002**	
Nivel educativo	**Total**	**Porcentaje**	**Total**	**Porcentaje**
Preescolar	2 858 890		3 635 903	
Primaria	14 425 669		14 857 191	
Secundaria	4 203 098		5 660 070	

Fuente: SEP, *Estadística Básica del Sistema Educativo Nacional.* Inicio de cursos 1992-1993.
SEP, DGPPP, Subdirección de Análisis Estadístico y Presupuestal 2003.

a) Anota en la tabla los porcentajes que corresponden a cada año.

b) Construye en tu cuaderno las gráficas circulares que representan la información de la tabla.

2. En la secuencia 14, **La TV ¿Ventana al mundo o "caja idiota"?**, de su libro de *Español I, volumen II* realizaron una encuesta sobre el impacto de la televisión en su familia; posteriormente, registraron los datos que reunieron todos los alumnos del grupo en una tabla. Ahora, en su cuaderno deberán utilizar esa información para presentarla en gráficas de barras o circulares, según sea conveniente para dar respuesta a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas horas permanece encendido el televisor durante el día? ____________

b) ¿En qué tipo de gráfico es más conveniente presentar esta información? ________

c) ¿Qué opinan otros compañeros? Si representaron de manera diferente la información, anoten por qué.

3. Una forma de recolectar datos es aplicando una encuesta.

a) Utilicen las siguientes preguntas para encuestar a un grupo de personas (pueden ser sus compañeros de grupo, todos los estudiantes de su escuela o algunas de las personas de su comunidad).

b) Una vez que hayan recopilado los datos, cada equipo deberá presentar en una gráfica de barras o circular los resultados de una de las preguntas de la encuesta. Si hay más de cuatro equipos en el grupo, no importa que se presenten más de dos gráficas de la misma pregunta. Compárenlas y determinen qué gráfica es mejor y está más completa.

Queremos conocer tus intereses

Encuesta de entretenimiento
Contesten marcando una opción en cada pregunta.

1 ¿Cuál es el tipo de música que te gusta escuchar?
a. grupera
b. rock
c. cumbia
d. clásica
e. balada

2 ¿Cuál es el tipo de programa que te gusta ver en la televisión?
a. noticias
b. comedias
c. caricaturas
d. musicales
e. concursos

3 ¿Cuál es el deporte que te gusta practicar?
a. basquetbol
b. futbol
c. natación
d. volibol

4 ¿Cuál es el tipo de película que te gusta ver?
a. suspenso
b. terror
c. comedia
d. drama
e. infantil

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre información para conocer otras estadísticas de los jugadores de futbol, consulten:
http://www.terceradivision.com.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Nociones de probabilidad

En esta secuencia enumerarás los posibles resultados de una experiencia aleatoria y utilizarás la escala de la probabilidad entre 0 y 1 expresada en forma de fracción, decimal y porcentaje. Además, establecerás cuál de dos o más eventos en una experiencia aleatoria tiene mayor probabilidad de ocurrir y justificarán su respuesta.

SESIÓN 1

PROBABILIDAD FRECUENCIAL

>>> Para empezar

La mayoría de las personas nos hemos enfrentado a situaciones en las que hay más de una alternativa y, sin tener preferencia por alguna, hemos dejado que la "suerte" lo decida. En matemáticas, decimos que es una situación de azar o aleatoria, y aunque no podemos asegurar cuál será su resultado, sí podemos determinar los posibles resultados.

>>> Consideremos lo siguiente

Si lanzas 10 veces una moneda al aire, ¿qué crees que suceda? ¿Caerán más águilas o más soles? ____________________________

>>> Manos a la obra

I. Cada integrante del equipo, por turno, lanza una moneda 10 veces al aire. Registren en la siguiente tabla los resultados de los tres integrantes. Tachen **A** si cae águila y **S** si cae sol.

Primer juego

Jugador	Número de volado										Total por resultado
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
Jugador 1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 3	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	

Contesten las siguientes preguntas

a) ¿Cuántas águilas cayeron por jugador? ______________________________

b) ¿Cuántos soles por jugador? ______________________________

c) Si vuelven a jugar, ¿creen que obtendrán los mismos resultados? __________

d) Realicen el juego dos veces más y marquen los resultados de cada torneo.

Segundo juego

Jugador	Número de volado										Total por resultado
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
Jugador 1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 3	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	

Tercer juego

Jugador	Número de volado										Total por resultado
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
Jugador 1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Jugador 3	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	

e) De los tres juegos que realizaron, ¿en cuál obtuvieron más águilas? ______________________________

f) ¿En cuál obtuvieron más águilas los otros jugadores? ______________________________

g) Consideren los resultados de los tres jugadores y completen la siguiente tabla.

Recuerda que:

Un experimento o fenómeno es aleatorio si su ocurrencia presenta varios resultados posibles y no se puede asegurar cuál de ellos se obtendrá.

Resultados en el equipo	Frecuencia	Frecuenta relativa		Porcentaje
		Fracción	Decimal	
Total de lanzamientos	**90**	$\frac{90}{90}$	**1**	**100%**
Caer águila		$\frac{\quad}{90}$		
Caer sol		$\frac{\quad}{90}$		

Al cociente entre el número de veces que ocurre el evento y el número de veces que se realizó el experimento se le llama probabilidad frecuencial de un evento. Con los resultados obtenidos en tu equipo pueden calcular la probabilidad frecuencial de obtener águila o de obtener sol. Se calcula así:

$$P\text{ (caer águila en el equipo)} = \frac{\text{Número de veces que cae águila}}{\text{Número de lanzamientos}}$$

P (caer águila en el equipo) se lee: probabilidad de caer águila en el equipo.

$$P\text{ (caer sol en el equipo)} = \frac{\text{Número de veces que cae sol}}{\text{Número de lanzamientos}}$$

h) Calculen la probabilidad frecuencial del evento "caer sol" que obtuvieron en sus primeros 10 lanzamientos.

$$P\text{ (caer sol en el grupo)} = \frac{\text{Número de veces que cae sol}}{\text{Número total de lazamientos}} = \frac{\quad}{10}$$

II. Ahora consideren los resultados de todo el grupo.

a) Calculen la probabilidad frecuencial del evento "caer águila" que se obtuvo en todo el grupo.

Resultados en el grupo	Frecuencia
Total de lanzamientos	
Caer águila	
Caer sol	

$$P\text{ (caer águila en el grupo)} = \frac{\text{Número de veces que cae águila}}{\text{Número total de lanzamientos}} = \underline{\qquad}$$

b) Completen la siguiente tabla, escribiendo en forma de fracción, número decimal y porcentaje la probabilidad frecuencial de los eventos “caer águila en el equipo” y "caer águila en el grupo". Comparen estas probabilidades.

Evento	Probabilidad frecuencial		
	Fracción	Decimal	Porcentaje
Caer águila en el equipo			
Caer águila en el grupo			

¿Es mayor la del equipo? ___________ ¿Es menor?___________ ¿Es igual?___________

c) ¿Creen que si repiten el experimento de lanzar 10 veces una moneda obtendrán la misma probabilidad frecuencial? ¿Por qué? ______________________________

____

____

>>> A lo que llegamos

La **probabilidad frecuencial** es una medida obtenida de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro un comportamiento. Sin embargo, no es definitiva, por lo que es importante saber interpretar los resultados que se obtienen.

La probabilidad frecuencial de un evento A, que se denotará **P(A)**, se obtiene dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre el evento}}{\text{Número total de veces que se realiza el experimento}}$$

Como el valor de la probabilidad es el de la frecuencia relativa, la probabilidad es un número entre **0** y **1**, que puede expresarse en forma de fracción, número decimal y porcentaje.

>>> Lo que aprendimos

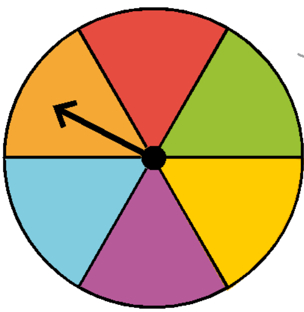
1. La siguiente tabla muestra los resultados que se obtuvieron en un grupo al lanzar una moneda. Con estos datos, contesten las siguientes preguntas.

Evento	**Probabilidad frecuencial**		
	Fracción	**Decimal**	**Porcentaje**
Caer águila en el grupo	$\frac{180}{300} = \frac{3}{5}$	0.60	60 %

a) ¿En total, cuántos volados se realizaron en el grupo? ______________

b) ¿En total, cuántas veces cayó sol? ______________

c) De acuerdo con la probabilidad frecuencial del evento caer águila obtenida por el grupo, si se realizan 100 volados, ¿en cuántos caerá águila? ______________



2. Elaboren una ruleta como la que se muestra en el dibujo. Pueden ayudarse con el procedimiento para trazar un hexágono de la segunda sesión de la secuencia 13 **Polígonos regulares**.

Cada integrante del equipo, por turnos, hace girar la ruleta. Para ello pueden desdoblar un clip y colocar un extremo en el centro de la ruleta. Anoten en la siguiente tabla en qué color se detiene. Giren la ruleta 50 veces y completen la siguiente tabla.

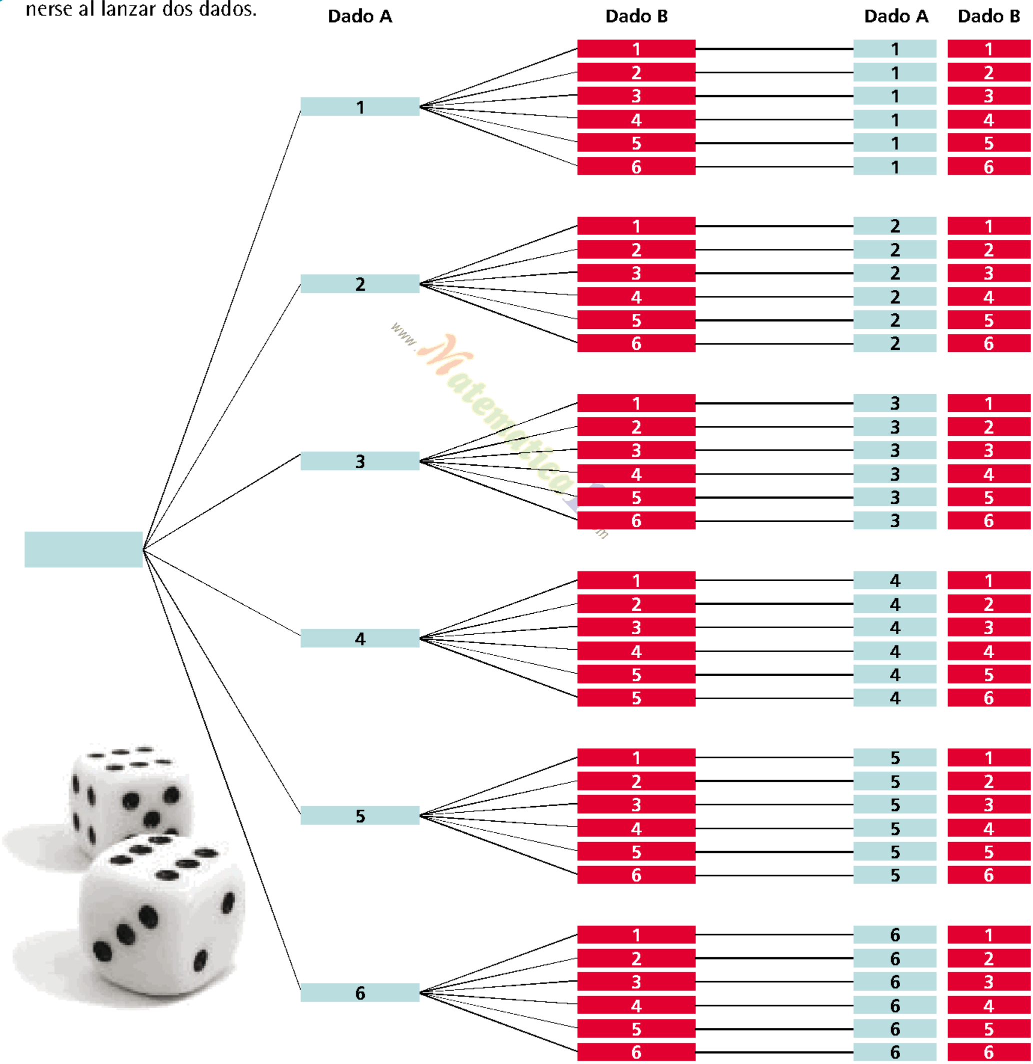
Resultados en el equipo					
Evento	**Conteo**	**Frecuencia**	**Probabilidad frecuencial**		
			Fracción	**Decimal**	**Porcentaje**
Cae el color azul			$\frac{\quad}{50}$		
Cae el color morado			$\frac{\quad}{50}$		
Cae el color verde			$\frac{\quad}{50}$		
Total		50	$\frac{50}{50}$		100%

>>> Para empezar

En la sesión 4 de la secuencia 8, **Problemas de conteo**, trabajaste con un diagrama de árbol para contar los resultados posibles al lanzar dos dados.

>>> Consideremos lo siguiente

El siguiente diagrama de árbol muestra todos los resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar dos dados.



a) ¿Cuántos resultados diferentes en total puede haber al lanzar dos dados? ______

b) Si se hace referencia al evento "la suma de los puntos obtenidos en el lanzamiento de dos dados", ¿qué suma es más probable de obtener? ____________________

c) ¿Qué suma tiene menos probabilidades de salir? ____________________

d) Si en un juego con dos dados te ofrecen la siguiente apuesta: "Si obtienes de tus dados una suma mayor que 7, ganas; si no, pierdes", ¿te arriesgarías a jugar? ________________ ¿Por qué? ________________ ¿A qué suma le apostarías para tener más seguridad de ganar? ________________ ¿A qué suma no le apostarías? ____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Dos resultados posibles para obtener una suma mayor que 7 son: (2, 6) y (3, 5).

a) Anoten los resultados favorables que faltan ____________________

b) ¿Cuántos resultados favorables son? ____________________

c) Busquen determinar qué fracción del total de resultados posibles representan. ____

d) ¿Cuáles son los resultados favorables del evento: "obtener una suma igual que 12 al lanzar dos dados"? ____________________

e) ¿Cuántos resultados favorables son? ____________________

f) ¿Qué fracción representan del total de resultados posibles? ____________________

g) Marquen en el siguiente diagrama rectangular los resultados favorables del evento: "obtener una suma igual que 7 al lanzar dos dados".

Sumas que se obtienen al lanzar dos dados

Caras del dado B						
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Caras del dado A

h) ¿Cuántos resultados favorables son? ____________________

i) ¿Qué fracción representan del total de resultados posibles? ____________________

>>> A lo que llegamos

Cuando se realiza un experimento aleatorio, el conjunto de todos los resultados sencillos posibles recibe el nombre de espacio de eventos o espacio muestral.

Por ejemplo, en el caso de lanzar dos dados, uno azul y otro rojo se lanzan una vez y se anota el número de puntos que aparecen en cada uno. El espacio muestral son todos los resultados sencillos posibles que se presentan en forma de diagrama de árbol.

Si ahora se lanzan dos dados y se obtiene la suma de los puntos que aparecen en cada uno, el espacio muestral es el que se observa en el diagrama rectangular.

j) Marquen en el mismo diagrama rectangular los resultados favorables del evento: "obtener una suma menor que 7".

k) ¿Cuántos resultados favorables son? ______________________

>>> A lo que llegamos

Se llama probabilidad clásica de un evento al número P(e) que se obtiene por medio del cociente:

$$P\ (e) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

II. Completen la siguiente tabla

Evento (e)	Resultados (dado A, dado B)	Número de resultados favorables al evento	Probabilidad clásica del evento P (e)
La suma de las caras de dos dados al caer es mayor que 7	(2, 6), (3, 5)		$\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}} = \frac{\quad}{36}$
La suma de las caras de dos dados al caer es igual que 12			$\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}} = $ ______
La suma de las caras de dos dados al caer es igual que 7			$\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}} = $ ______
La suma de las caras de dos dados al caer es menor que 12			$\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}} = $ ______
La suma de la cara de dos dados al caer es menor que 7			$\frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}} = $ ______

a) Consideren la probabilidad de los siguientes eventos:

¿Qué evento es más probable que ocurra al lanzar dos dados: obtener una suma igual que 12 o una igual a 7? ____________________

b) ¿Qué evento es más probable que ocurra al lanzar dos dados: obtener una suma mayor que 7 o una menor a 7? ____________________

c) Calculen las siguientes probabilidades:

P (la suma es igual que 1) = ____________________

P (la suma es igual que 6) = ____________________

¿A qué suma no le apostarían? ____________________

d) Completen la siguiente tabla calculando la probabilidad clásica de cada evento que se pide.

Evento	La suma es igual que 13	La suma es un número par	La suma es igual que 7	La suma es menor que 13
Probabilidad clásica $\dfrac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados posibles}}$				

e) ¿Cuántos resultados favorables existen al lanzar dos dados en los que la suma sea menor que 13? ____________________

f) ¿Cuántos resultados favorables existen al lanzar dos dados en los que la suma sea igual que 13?____________________

>>> A lo que llegamos

Para obtener la **probabilidad clásica** de un evento no se requiere de la realización de experimentos, como en la probabilidad frecuencial, sino de conocer dos datos:

El de todos los resultados posibles que se pueden dar en una situación de azar, y el de los resultados favorables de un evento de esa situación:

$$P\ (e) = \frac{\text{Número de resultados favorables del evento}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

A la probabilidad clásica se le llama también **probabilidad teórica**.

Cuando el número de resultados favorables de un evento es el mismo que los resultados posibles (espacio muestral), se trata de un **evento seguro**, y la probabilidad de ese evento es igual a **1**.

Cuando el número de resultados favorables de un evento es 0, es decir, no hay casos favorables, entonces se trata de un **evento imposible** y la probabilidad de ese evento es **0**.

Si el valor de la probabilidad de un evento es un número muy cercano a 0, se dice que ese evento es poco probable, pero si el valor de la probabilidad de ese evento es un número muy cercano a 1, entonces el evento es muy probable.

>>> Lo que aprendimos

En una urna hay dos canicas blancas y dos negras. Extrae una canica de la urna, anota el color, y devuélvela a la urna; de nuevo extrae una canica y anota su color. De esta forma, dos extracciones sucesivas conducen a uno de estos cuatro resultados:

¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos?

a) Extraer dos canicas negras. ______________________

b) Extraer dos canicas de diferente color. ______________________

c) Extraer dos canicas blancas. ______________________

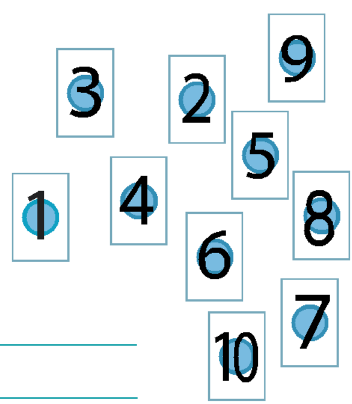
COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES I

SESIÓN 3

>>> Para empezar

¿Qué es más probable?

La comparación de probabilidades permite determinar cuál es la mejor opción que se puede elegir, ya sea en un juego o en otro tipo de situaciones de azar.



>>> Consideremos lo siguiente

En una caja hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10.

Si sacas una tarjeta al azar, ¿cuántos resultados posibles hay? ______________________

¿Qué probabilidad existe de obtener un número par? ______________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Formen equipos de tres integrantes y coloquen tarjetas de papel numeradas del 1 al 10 en una caja o bolsa.

a) ¿Cuáles son las tarjetas que tienen un número par? ______________________

b) ¿Cuántas formas existen de obtener un número par? ______________________

c) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener un número par? ________________

$$\text{P (obtener un número par)} = \frac{\text{resultados favorables de obtener un número par}}{\text{resultados posibles al extraer una tarjeta}}$$

II. Ahora, cada integrante del equipo saca de la caja una tarjeta numerada y anota el resultado en la siguiente tabla. Luego regresa la tarjeta y repite el experimento otro integrante del equipo hasta que cada quien haya hecho 10 extracciones.

Jugador	**Extracciones**										**Número de veces que obtuvieron una tarjeta par**
	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**	**7°**	**8°**	**9°**	**10°**	
Jugador 1											
Jugador 2											
Jugador 3											

a) En total, ¿cuántas veces obtuvieron una tarjeta con un número par? __________

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de este evento? ______________________

c) Comparen la probabilidad clásica de obtener un número par y la probabilidad frecuencial que obtuvieron al realizar el experimento. ¿Son iguales? ____________

¿Cuál es mayor? ____

Recuerden que:
La probabilidad puede expresarse en forma de fracción, decimal y porcentaje.

III. Reúnan los resultados que obtuvieron en su equipo con los de los demás equipos y completen la tabla.

Equipo	Número de veces que se obtuvo una tarjeta con un número par	Número total de extracciones
Total		

a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener una tarjeta con un número par en su equipo? ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener una tarjeta con un número par en su grupo? ____________________

c) Ahora, comparen esta probabilidad con la probabilidad clásica de este evento. ¿Se aproxima la probabilidad frecuencial de este evento a la probabilidad clásica?

____

d) ¿Cuál de las dos probabilidades frecuenciales, la que obtuvo su equipo o la del grupo, es más cercana a la de la probabilidad clásica? ____________________

____

IV. Consideren que la urna tiene 20 tarjetas numeradas del 1 al 20 y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 0?

____

b) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 10?

____

c) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número par? ______

____

d) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener una tarjeta con un número mayor que 20?

____

e) ¿Se podría dar el caso de que el número de resultados favorables sea mayor que el número de resultados posibles? ___

>>> A lo que llegamos

La probabilidad clásica es diferente de la probabilidad frecuencial.
Para obtener la probabilidad clásica se consideran las condiciones del experimento.
Por ejemplo, en una urna hay veinte tarjetas numeradas del 1 al 20 y se quiere elegir una tarjeta con número impar, entonces la probabilidad clásica es $\frac{1}{2}$; y la probabilidad frecuencial se calcula a partir de los resultados que se obtienen al efectuar el experimento.
En este caso, si se realizó el experimento 100 veces y 38 veces se sacó una tarjeta con número impar, la probabilidad frecuencial de este evento es:

$$P\text{ (sacar número impar)} = \frac{38}{100} = 0.38 = 38\%$$

Después de realizar muchos experimentos, la probabilidad frecuencial de un evento se parece a la probabilidad clásica.
Tanto la probabilidad clásica como la frecuencial se pueden expresar utilizando fracciones, decimales y porcentaje.

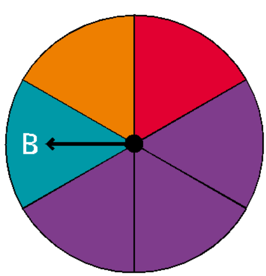
>>> Lo que aprendimos

1. Indiquen en cada caso si se trata de probabilidad frecuencial o probabilidad clásica:

a) Una bolsa contiene 5 canicas rojas y 7 azules. La probabilidad de sacar una canica roja es $\frac{5}{12}$. ___

b) Se les hace una encuesta a 600 personas para conocer qué bebida prefieren tomar para acompañar su comida; se sabe que 450 prefieren refresco. Se determina que la probabilidad del evento es $\frac{450}{600}$. ___

c) En una feria hay una ruleta como la siguiente:



La probabilidad de caer en el área B es ___

2. En un restaurante hay una rockola que tiene 40 diferentes melodías, las cuales están clasificadas y distribuidas equitativamente en cuatro diferentes tipos de música:

a) Grupera b) Rock c) Cumbia d) Balada

a) Calculen la probabilidad clásica de que sea seleccionada una melodía de rock.

$$P\ (\text{rock}) = \frac{\text{opciones de elegir música rock}}{\text{total de opciones de elegir una melodía}}$$

En la siguiente tabla se muestra la preferencia con la cual se han seleccionado las melodías a partir del tipo de música al que pertenece.

Tipo de música	**Grupera**	**Rock**	**Cumbia**	**Balada**
Núm. de veces que se tocó	15	24	11	30
			Total	**80**

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de seleccionar una melodía de música grupera?

$$P\ (\text{grupera}) = \frac{\text{veces que se tocó música grupera}}{\text{número total de melodías que se tocaron}}$$

c) Comparen la probabilidad clásica de que sea seleccionada una melodía que pertenece al género de la música grupera y la probabilidad frecuencial del mismo evento.

¿Son iguales? ______________________ ¿Cuál es mayor? ________________________

d) Calculen las probabilidades que se indican:

Tipo de música	**Probabilidad clásica**	**Probabilidad frecuencial**
Cumbia	P (cumbia) =	P (cumbia) =
Rock	P (rock) =	P (rock) =
Balada	P (balada) =	P (balada) =
Grupera	P (grupera) =	P (grupera) =

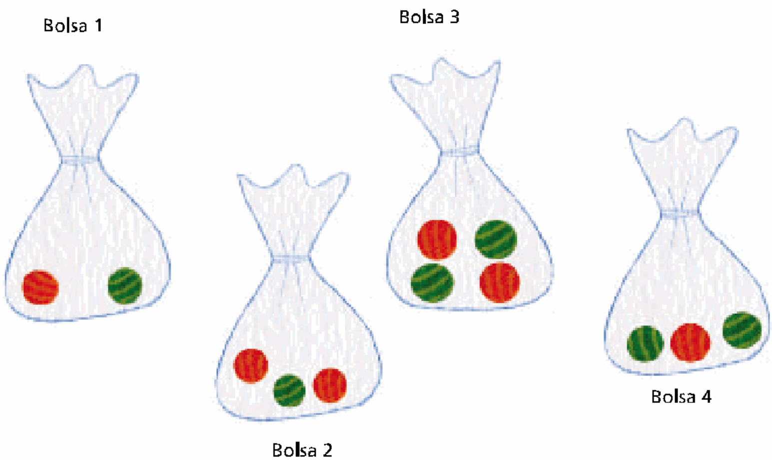
COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES II

>>> Para empezar

Cuando has participado en un juego de azar, ¿alguna vez te ha tocado elegir las reglas que rigen el juego? En esta sesión calcularás las probabilidades de diversos eventos y distinguirás cuál es más probable que ocurra, cuál es menos probable y cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

>>> Consideremos lo siguiente

Para realizar el siguiente juego se necesitan 4 bolsas no transparentes, 6 canicas rojas y 6 canicas verdes. Hay que distribuir las canicas en las cuatro bolsas como se indica en la figura.



El juego se realiza de la siguiente manera: cada integrante elige una de las cuatro bolsas y extrae, sin mirar, una canica; anota el color que sale. Después regresa la canica a la bolsa y repite hasta tener 20 extracciones. Gana quien haya sacado más veces una canica roja de la bolsa que eligió. Antes de empezar a jugar contesten:

¿Qué creen que sea más probable, extraer una canica roja de la bolsa 1 o de la bolsa 3?

____

¿Qué bolsas elegirían? ________________________________

¿Por qué? ____________________________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Realicen el juego. Usen el siguiente casillero para anotar la letra **r** si sale roja y la **v** si sale verde. Repitan el experimento 20 veces para llenar los casilleros. Recuerden, gana quien haya sacado más veces una canica roja.

Bolsa núm.____________ Resultado en cada extracción																			
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª	15ª	16ª	17ª	18ª	19ª	20ª

a) Utilicen la siguiente tabla para registrar los resultados que obtuvieron al realizar este juego.

Resultados de 20 extracciones en la bolsa ____________		
Color de la canica	**Frecuencia Número de veces que sale una canica**	**Probabilidad frecuencial**
 **Roja (r)**		**P (r) =** ____________________
 **Verde (v)**		**P (v) =** ____________________

b) Analicen los resultados obtenidos por todos los integrantes de su equipo. ¿Quién ganó?____________________________________

c) ¿Qué número de bolsa utilizó?______________________________

d) ¿Cuál es la **probabilidad frecuencial** de sacar una canica roja en esa bolsa?

____

e) Consideren los resultados del equipo, ¿qué color de canica salió más veces?

____

II. Reúnan los resultados del grupo en la siguiente tabla y después marquen con "**X**" si es verdadero (**V**) o falso (**F**) en el cuadrito correspondiente.

Total de canicas de color rojo				
Equipo	**Bolsa 1**	**Bolsa 2**	**Bolsa 3**	**Bolsa 4**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Total de canicas de color rojo (Frecuencia)				
Probabilidad frecuencial de sacar una canica roja: Fracción				
Probabilidad frecuencial de sacar una canica roja: Decimal				
Probabilidad frecuencial de sacar una canica roja: %				

	V	F
a) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 2.		
b) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 4.		
c) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 2 que de la bolsa 4.		
d) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 1 que de la bolsa 3.		
e) Es más probable extraer una canica roja de la bolsa 2 que de la bolsa 3.		

III. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad clásica de sacar una canica roja de cada bolsa?

Bolsa 1	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 1}}{\text{número de canicas en la bolsa 1}}$ =
Bolsa 2	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 2}}{\text{número de canicas en la bolsa 2}}$ =
Bolsa 3	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 3}}{\text{número de canicas en la bolsa 3}}$ =
Bolsa 4	P (sacar una canica roja) = $\frac{\text{número total de canicas rojas en la bolsa 4}}{\text{número de canicas en la bolsa 4}}$ =

b) De acuerdo con estos cálculos, para ganar el juego, ¿qué bolsa debes elegir?

____

c) ¿Por qué? ____

d) Pregúntale a alguno de tus compañeros qué bolsa eligió. ______________________

e) ¿En qué bolsas existe la misma probabilidad de sacar una canica roja? __________

f) ¿Por qué? ____

>>> A lo que llegamos

La comparación de probabilidades permite determinar cuál es la mejor opción que se puede elegir, ya sea en un juego o en otro tipo de situaciones. Así, por ejemplo, en el juego anterior podemos determinar la probabilidad clásica de sacar una canica roja de cada bolsa y elegir la bolsa que más nos convenga.

La probabilidad clásica proporciona una información de lo que puede suceder, mientras que la probabilidad frecuencial indica lo que sucedió al realizar el juego.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Claudia Gómez. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.

Sobre información para conocer otros juegos de azar consulta:
http://www.acanomas.com/Biblioteca.php [Fecha de consulta: 23 de agosto 2007].

Números con signo

En esta secuencia plantearás y resolverás problemas que impliquen la utilización de números con signo.

SESIÓN 1

NIVEL DEL MAR

>>> Para empezar

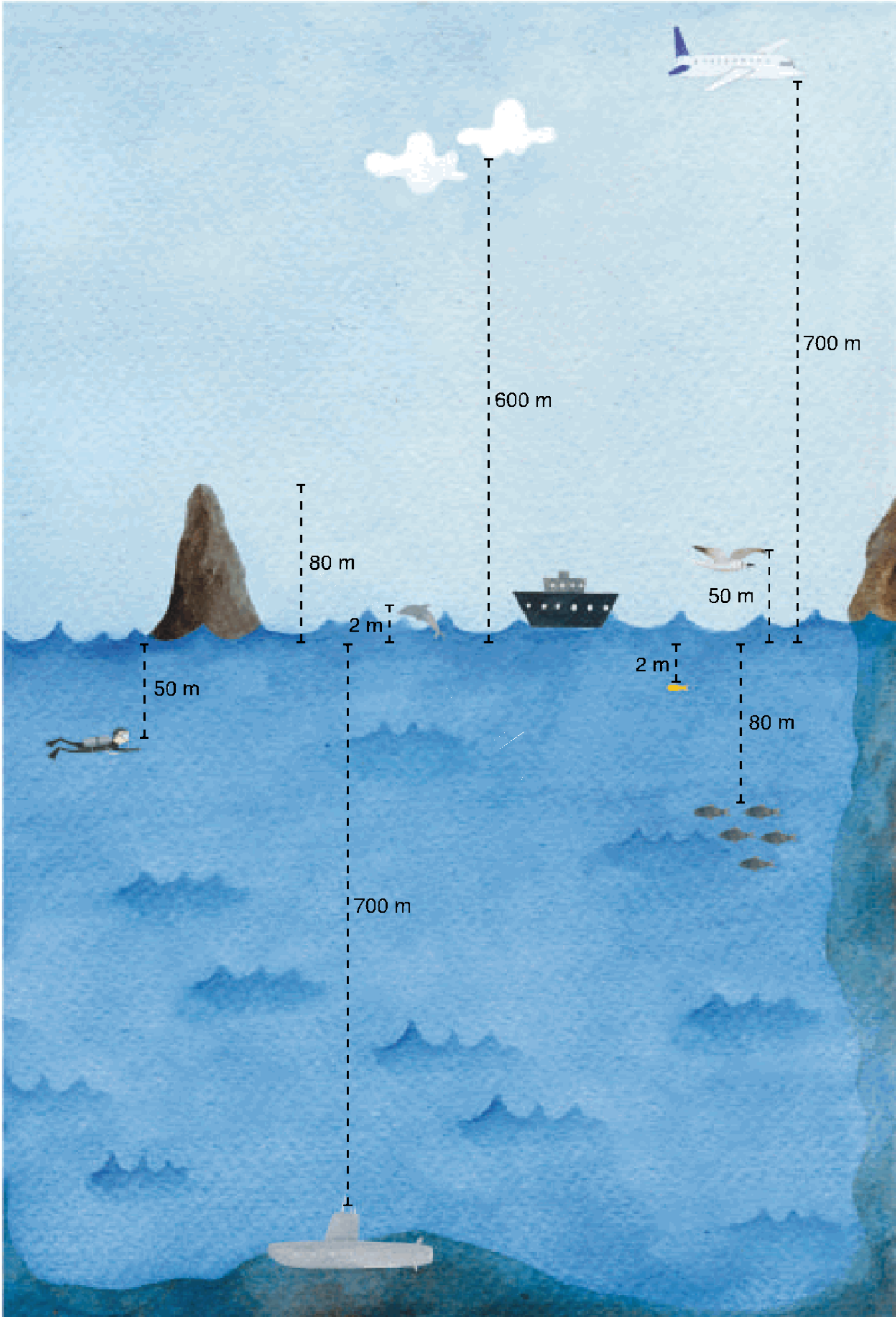
Existen situaciones donde además de utilizar los números naturales se requieren otros números, por ejemplo: al calcular los gastos y las ganancias de una tienda, en un termómetro ambiental, en la línea del tiempo, en metros sobre y bajo el nivel del mar, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

Para jugar necesitan organizarse en parejas:

- Todos observen con cuidado la siguiente ilustración.
- Cada pareja escoge cuatro objetos de los que ahí aparecen.
- Cada pareja envía un mensaje por escrito a otra pareja indicando la ubicación de los cuatro objetos que eligieron. Pero hay una condición: en el mensaje NO SE VALE ESCRIBIR PALABRAS NI HACER DIBUJOS O FLECHAS.
- La pareja que recibe el mensaje debe interpretarlo para saber cuáles fueron los objetos que sus compañeros eligieron. Cuando los hayan encontrado, los anotan en el mensaje y lo regresan a la pareja que lo envió.
- Cuando terminen, revisen si la otra pareja interpretó correctamente. Si hubo equivocaciones, deben encontrar en dónde estuvo la falla y corregirla.

Anoten en el pizarrón las distintas maneras que utilizaron para identificar los objetos, decidan cuáles fueron las más adecuadas, o aquellas que les gustaron más, y escriban por qué.


700 m
600 m
80 m
2 m
50 m
50 m
2 m
80 m
700 m

>>> Manos a la obra

I. En otra telesecundaria, una de las parejas elaboró un mensaje que fue correctamente interpretado por otra pareja. Fíjense cómo hicieron:

Pareja que elaboró el mensaje. → | ← Pareja que recibió el mensaje.

Objetos que elegimos:	Creemos que es el:
☺ 700 m	Avión
☺ 600 m	Nubes
0 m	Barco
**2 m	Pez amarillo
**50 m	Buzo

a) Utilicen ese mismo sistema y completen la siguiente tabla.

Ubicación	Dibujo
	Gaviotas
☺ 80 m	
	Barco
☺ 2 m	
	Peces
**700 m	

b) El barco está ubicado al nivel del mar. También hay objetos sobre el nivel del mar (como las nubes) y bajo el nivel del mar (como el submarino).

- ¿Cómo representó esta pareja a los objetos que están ubicados sobre el nivel del mar? ____________________
- ¿Cómo representó esta pareja a los objetos que están ubicados bajo el nivel del mar? ____________________
- ¿A cuántos metros ubicaron el barco? ____________________

Comparen estos mensajes con los mensajes que ustedes elaboraron. ¿Cuáles le parecen más claros y por qué?

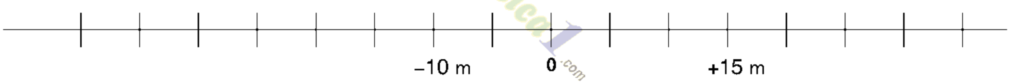
Como vieron, hay distintas maneras de comunicar la ubicación de los objetos, sin embargo, es posible que algunas personas no sepan qué es lo que se quiere decir en un mensaje. Por ello, en matemáticas se representa el nivel del mar con el cero, lo que está sobre el nivel del mar con signo positivo "+" y lo que está bajo el nivel del mar con signo negativo "– ".

II. Completen la siguiente tabla usando los signos + y –, según corresponda:

Objeto	Ubicación
Algas marinas a 20 m bajo el nivel del mar	– 20 m
Una lancha sobre el nivel del mar	
Un delfín que salta 5 m sobre el nivel del mar	
Un tiburón que nada a 5 m bajo el nivel del mar	
Una roca que sobresale 20 m sobre el nivel del mar	+ 20 m

III. En matemáticas se usa la recta numérica para ubicar a los números positivos, negativos y al cero. Primero, determinen el lugar del cero (como lo hicieron en la secuencia 2), después los números con signo + se ubican a la derecha del cero y los números con signo - se ubican a la izquierda del cero.

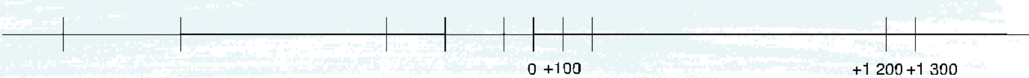
Localicen en la siguiente recta numérica los objetos que se mencionan en la tabla del inciso c). Fíjense que cada división vale 5 unidades.



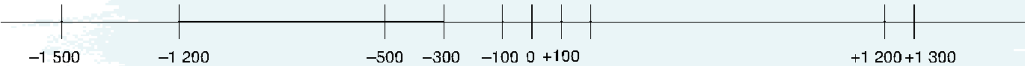
>>> A lo que llegamos

Los números que has utilizado en esta sesión se llaman: números con signo. Pueden ser positivos o negativos, y para diferenciarlos se representan de la siguiente manera:

Números positivos: se ubican a la derecha del cero en la recta numérica y se escriben anteponiéndoles un signo +; por ejemplo, el 5 positivo se escribe +5.
En el caso de los objetos de la ilustración, los números positivos se utilizan para designar a todo lo que se encuentra arriba del nivel del mar.



Números negativos: se ubican a la izquierda del cero en la recta numérica y se escriben anteponiéndoles un signo –, por ejemplo, el 7 negativo se escribe **–7**. En el caso de los objetos de la ilustración, los números negativos se utilizan para designar a todo lo que se encuentra por debajo del nivel del mar.

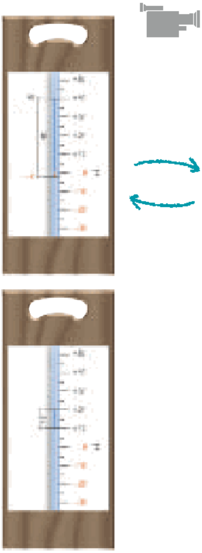


El **cero** se escribe sin signo (no se le pone + ni –). En la ilustración, todo lo que se encuentra en el nivel del mar se dice que está a 0 metros.

SESIÓN 2

DISTANCIA Y ORDEN

>>> Para empezar



Temperaturas ambientales

Los termómetros ambientales, como el de la ilustración, miden tanto temperaturas sobre cero o **temperaturas positivas,** como temperaturas bajo cero o **temperaturas negativas**. Las temperaturas bajo cero se distinguen porque se escriben anteponiéndoles el signo "–".

En la secuencia 4 **La Tierra: Un planeta con vida** de tu libro de *Geografía de México y del mundo, volumen I* estudiaste las diversas características que definen el clima, como la variación de la temperatura. En el desierto, la variación de la temperatura determina las condiciones climáticas extremas que lo caracterizan: en un mismo día puede haber temperaturas máximas de 40 °C y temperaturas mínimas de 2 °C. En este caso hay una variación de 38 °C.

En contraste, las zonas tropicales tienen variaciones de temperatura muy pequeñas: en promedio, las temperaturas máximas pueden ser de 20 °C y las mínimas de 10 °C. La variación de la temperatura es entonces de 10 °C, porque hay 10 grados entre 20 °C y 10 °C.

La variación de la temperatura es un factor que influye tanto en la conservación del equilibrio biológico como en la salud y el bienestar de los seres humanos. Grandes variaciones de temperatura pueden ocasionar la extinción de plantas y animales o la pérdida de las cosechas en el campo.

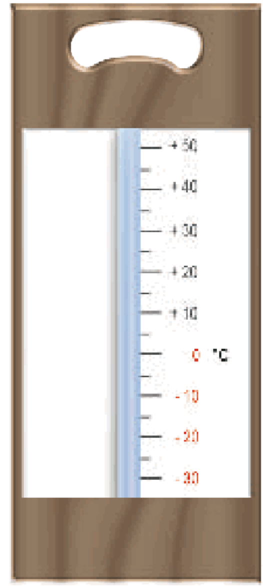
>>> Consideremos lo siguiente

El 4 de noviembre del 2005, el Servicio Meteorológico Nacional publicó un aviso de heladas que se esperaban en distintas ciudades para ese día.

Ciudad	Estado	Temperatura máxima (°C)	Temperatura mínima (°C)
Las Vigas de Ramírez	Puebla	26.5	1.0
El Saladillo	Zacatecas	22.0	-5.0
Tepatitlán	México	23.5	-4.0
Balcón del Diablo	Puebla	26.5	2.5

Tabla 1

Con estos datos, contesten las siguientes preguntas (si lo necesitan, se pueden auxiliar del termómetro de la derecha):



a) ¿De cuánto se esperaba la variación de temperatura en Las Vigas de Ramírez?

____

b) ¿De cuánto se esperaba la variación de temperatura en Tepatitlán?

____

c) ¿Cuál de las temperaturas máximas que se esperaban en Las Vigas de Ramírez y Tepatitlán es mayor? ______________________________

d) ¿Cuál de las temperaturas mínimas que se esperaban en Tepatitlán y Las Vigas de Ramírez es menor? ______________________________

Comparen sus resultados y comenten sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. En una escuela obtuvieron los siguientes resultados:

- En el equipo 1 dijeron que la variación que se esperaba en Tepatitlán es de 19.5 °C, porque $23.5 - 4 = 19.5$.
- En el equipo 2 utilizaron el termómetro ambiental para localizar las temperaturas y dijeron que la variación es de 27.5 °C, porque es el número de grados que hay entre ambas temperaturas.

a) En el termómetro de la derecha ubiquen las temperaturas 23 °C y –4 °C.

b) Cuenten los grados que hay de –4 °C a 0 °C. Hay ____________ grados.

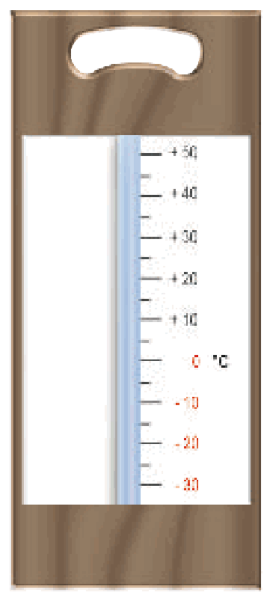
c) Cuenten los grados que hay de 0 °C a 23.5 °C. Hay ____________ grados.

d) ¿Cuántos grados hay de –4 °C hasta 23.5 °C? ______________________________

e) ¿De cuánto es la variación de temperatura que se esperaba en Tepatitlán?

____

f) ¿Cuál de los dos equipos obtuvo la variación correcta? ______________________________



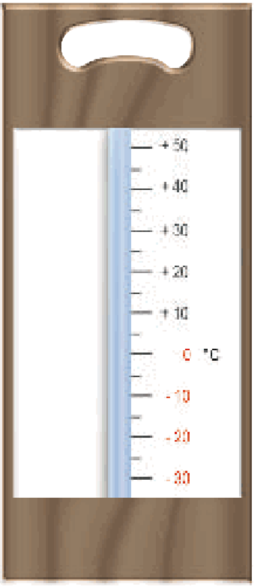
II. Usando el mismo termómetro, contesten las siguientes preguntas:

a) La temperatura máxima de una ciudad es de 18 °C y la temperatura mínima de –2 °C. ¿De cuánto es la variación de temperatura en esa ciudad?

____

b) La temperatura mínima de otra ciudad es de –8 °C. Si se sabe que la variación de temperatura es de 12 °C, ¿cuál es la temperatura máxima de dicha ciudad? ______________________________

III. En otros países se han registrado las siguientes temperaturas:



Ciudad	Estado	Temperatura máxima (°C)	Temperatura mínima (°C)
Anchorage	Alaska (Estados Unidos de América)	–6.0	–13.0
Armstrong	Ontario (Canadá)	–1.0	–9.0

a) En el termómetro de la izquierda, localicen las temperaturas máxima y mínima de Anchorage.

b) ¿Cuántos grados hay de –6 °C a –13 °C? ______________________

c) ¿De cuántos grados es la variación de temperatura en Anchorage?

____

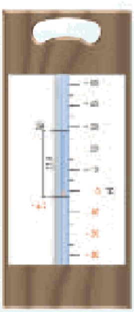
d) En el mismo termómetro, localicen las temperaturas máxima y mínima de Armstrong.

e) ¿Cuántos grados hay de –1 °C a –9 °C? ______________________

f) ¿De cuántos grados es la variación de temperatura en Armstrong?

____

>>> A lo que llegamos



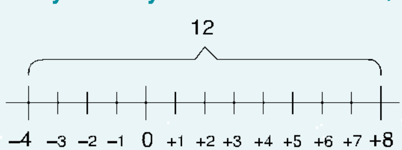
- **La variación de temperatura es el número de grados que hay entre ambas temperaturas.**

  Por ejemplo, en el termómetro de la izquierda:

	Máxima	Mínima	Diferencia
Ajocucar	29.0	–2.5	31.5

- **La variación de temperatura también la podemos ver como la distancia que hay entre dos números en una recta numérica horizontal.**

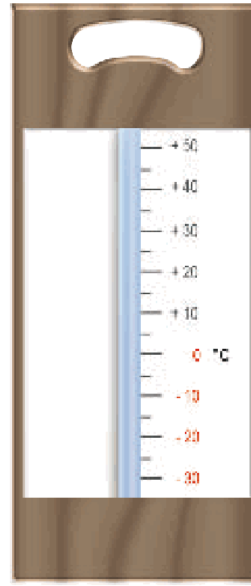
Por ejemplo: entre el –4 y el 8 hay una distancia de 12, como lo muestra la ilustración.



Es decir, la distancia entre dos números es la longitud del segmento que los une.

IV. De las temperaturas mínimas de Tepatitlán y Las Vigas de Ramírez dos alumnos dicen lo siguiente:

- Dulce dice que Las Vigas de Ramírez tiene la menor temperatura, porque 1 es menor que 4.
- Consuelo dice que Tepatitlán tiene la menor temperatura, porque –4 °C está abajo de 1°C.



a) ¿Quién creen que tiene la razón? ____________________

b) En el termómetro de la derecha ubiquen las temperaturas 12 °C y 2 °C.

c) ¿Cuál de las dos es menor? ____________________

La temperatura 2 °C está debajo de 12 °C y es la menor de ellas.

d) En el mismo termómetro, ubiquen las temperaturas mínimas de Las Vigas de Ramírez y Tepatitlán.

e) ¿Cuál de las dos temperaturas está debajo de la otra? ____________________

f) ¿Cuál de las dos es menor? ____________________

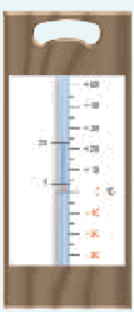
Comparen sus respuestas.

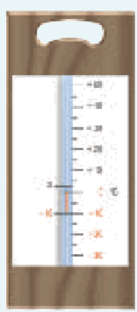
>>> A lo que llegamos

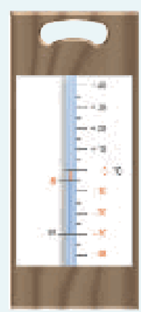
- **Al comparar dos temperaturas en un termómetro, siempre es mayor aquella que está más arriba.**

Por ejemplo:

a) 22 °C es mayor que 3 °C. b) 2 °C es mayor que –10 °C. c) –5 °C es mayor que –35 °C.







- **Al comparar dos temperaturas en la recta numérica, siempre es mayor aquella que está más a la derecha.**

Por ejemplo:

a) +9 es mayor que +2. b) +5 es mayor que –10. c) –3 es mayor que –15.

>>> Lo que aprendimos

1. ¿Qué distancia hay entre los siguientes pares de números?

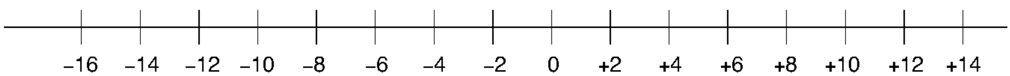
a) –6 y +10 ______ b) +10 y +26 ______ c) –9 y –1 ______ d) –15 y +3 ______

2. ¿Que distancias hay entre...

a) –6 y 0? ______ b) 0 y +8? ______ c) –4 y 0? ______

3. Escriban mayor que (>) o menor que (<) según corresponda. Ayúdense con la recta numérica.

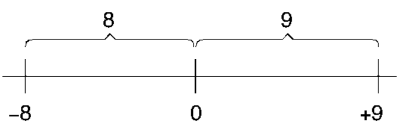
a) +14 ______ +6 b) –9 ______ +5 c) –4 ______ –15



SESIÓN 3

VALOR ABSOLUTO Y SIMÉTRICOS

>>> Para empezar



La distancia de un número al cero es la longitud del segmento que va del cero al número. A esta longitud se le llama valor absoluto, y se representa por medio de dos barras paralelas $|\ |$

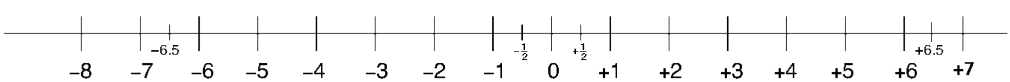
Por ejemplo: Entre el –8 y el 0 hay un segmento de longitud 8.

Entre +9 y el 0 hay un segmento de longitud 9.

El valor absoluto de –8, se escribe $|-8| = 8$. El valor absoluto de +9, se escribe $|+9| = 9$

>>> Consideremos lo siguiente

En la siguiente recta numérica se han ubicado algunos números.



a) ¿Qué número positivo tiene el mismo valor absoluto que –6.5?

b) ¿Qué número negativo tiene el mismo valor absoluto que $+\frac{1}{2}$?

c) ¿Cuáles números tienen valor absoluto 5?

Comparen sus respuestas y comenten sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Sobre el anterior inciso c):

- Pablo dice que el único número cuyo valor absoluto es 5 es el número +5
- Delia dice que son dos números: el +5 y el −5

  a) ¿Con quién de los dos están de acuerdo? ¿Por qué?

  b) ¿Cuál es la distancia del −5 al cero?, ¿y del +5 al cero?

  c) ¿Qué números tienen como valor absoluto 5?

II. Contesten las siguientes preguntas:

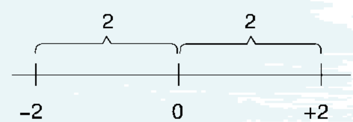
a) ¿Qué número negativo tiene el mismo valor absoluto que +20? ________________

b) ¿Qué valor absoluto tienen los números +13 y −13? ________________

c) ¿Qué número positivo tiene el mismo valor absoluto que −9.5? ________________

>>> A lo que llegamos

- **El valor absoluto de números positivos y negativos siempre es un número positivo.**
  Por ejemplo: $|-12.5| = 12.5$ y $|+12.5| = 12.5$
- **Dos números que están a la misma distancia del cero se llaman números simétricos entre sí.**
  Por ejemplo: +2 y −2 son números simétricos entre sí.



III. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el número simétrico del +6? ________________

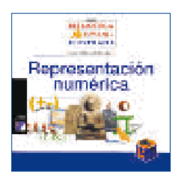
b) ¿Cuál es el número simétrico del −35? ________________

c) ¿Cuál es el número simétrico del −13.9? ________________

d) ¿Cuál es el número simétrico del +26.1? ________________

e) ¿El número $+\frac{1}{2}$ y el $-\frac{1}{2}$ son simétricos? ________________

f) ¿Cuál es el número simétrico del $-\frac{3}{4}$? ________________



Comparen sus respuestas.

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Bosch, Carlos y Claudia Gómez. "Números enteros" en *Una ventana al infinito*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Luz María Marván. "Números simétricos", "Números con signo", "¿Mayor o menor?" y “El valor absoluto” en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Raíz cuadrada y potencias

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural, ambas de números naturales y decimales.

SESIÓN 1

CUADROS Y MÁS CUADROS

>>> Para empezar

En la secuencia 4 de *Matemáticas I* encontraste la expresión algebraica de la fórmula del cuadrado. Si el lado del cuadrado mide ℓ, entonces su área **A** se calcula con la expresión: $\mathbf{A} = \ell \times \ell$. En esta sesión, estudiarás cómo encontrar la medida del lado del cuadrado a partir de su área.

>>> Consideremos lo siguiente

Calculen:

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado que tiene lados que miden 2 cm? ______________

b) ¿Cuál es el área de un cuadrado que tiene lados que miden 3 cm? ______________

c) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene 16 cm² de área? ______________

d) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene 25 cm² de área? ______________

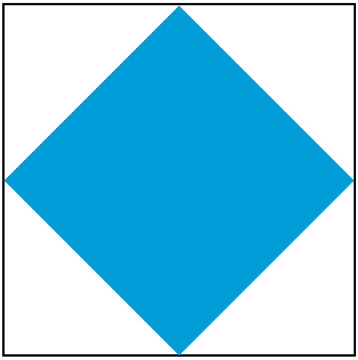
e) ¿Creen que exista algún cuadrado de 18 cm² de área? ______________ ¿Cuánto medirían sus lados? ______________

Expliquen y comprueben sus respuestas en su cuaderno.

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. En la ilustración hay un cuadrado blanco cuyos lados miden 6 cm; dentro del cuadrado blanco hay un cuadrado azul.



a) Calculen el área del cuadrado blanco ______________

Tracen las diagonales del cuadrado azul. Van a obtener cuatro triángulos azules iguales.

b) Calculen el área de cada triángulo azul. ______

c) Calculen el área del cuadrado azul. ______

d) ¿Cuánto miden los lados del cuadrado azul? ______

Midan con su regla.

e) En sus cuadernos, comprueben la medida que obtuvieron para el lado del cuadrado azul aplicando la fórmula del área: $A = \ell \times \ell$

¿Qué valor del área encontraron usando la fórmula? ______

Recuerden que:
El área de un triángulo con medida de la altura a y medida de la base b se calcula:
$A = \frac{b \times a}{2}$

Comparen sus respuestas y comenten:

a) De los valores del área que encontraron usando la fórmula, ¿cuál es el que más se aproxima a 18 cm^2?

b) ¿Cuál es la mejor aproximación que encontraron para la medida del lado del cuadrado?

II. Llenen la siguiente tabla para encontrar valores aproximados a la medida del lado del cuadrado de área 18 cm^2:

Medida del lado (cm)	Área (cm^2)
1	1
2	
3	
	16
5	
	36
4.5	
4.2	
4.3	
4.25	

a) ¿Cuál es el valor más aproximado que encontraron para la medida del lado del cuadrado? ______

b) ¿Podrían encontrar un valor más aproximado? ______ ¿Cuál?

______

Comparen sus respuestas.

III. ¿Creen que exista algún cuadrado de **32** cm^2 de área? ____________ ¿Cuánto medirían sus lados? ____________

a) Completen la siguiente tabla para encontrar valores aproximados a la medida de sus lados.

Medida del lado (cm)	Área (cm^2)
5	25
5.5	
5.6	
5.7	
6	

b) La medida del lado de este cuadrado está entre 5.6 cm y 5.7 cm. ¿Con qué valor continuarían la tabla para encontrar un valor que se aproxime más a la medida del lado de este cuadrado? ____________

c) Hagan la comprobación. ¿Qué valor del área encontraron? ____________

Comparen sus respuestas y hagan la comprobación.

>>> A lo que llegamos

- Para calcular el área de un cuadrado, conociendo la medida de su lado ℓ, se multiplica la medida del lado por ella misma: $\ell \times \ell$

  En general, cuando se multiplica un número por él mismo, por ejemplo **y × y**, se dice que se calcula la **segunda potencia** o el **cuadrado** del número. Esto se escribe: y^2

  Por ejemplo, al calcular **5 × 5**, se dice que se está calculando **5** a la **segunda potencia** o el **cuadrado** de **5**, y se escribe 5^2. O sea:

$$5 \times 5 = 5^2 = 25$$

- Al calcular el lado de un cuadrado a partir de su área se dice que se calcula la **raíz cuadrada** del área. En general, la **raíz cuadrada** de un número **A** es el número que multiplicado por él mismo da **A**.

  Por ejemplo, la raíz cuadrada de **16** es **4**, porque **4 × 4 = 16**. La raíz cuadrada de **16** se escribe: $\sqrt{16}$

IV. Llenen la siguiente tabla:

Número ℓ	Cuadrado del número ℓ^2
7	
	64
9	
	100
11	
	132.25
12	
	169
	196
15	
	240.25
16	

Pueden usar calculadora para hacer y verificar sus cálculos.

A partir de la información de la tabla anterior, relacionen las dos columnas:

(a) ¿Cuál es el área del cuadrado cuyos lados miden 13 cm?	( ) 144
(b) ¿A cuánto es igual $\sqrt{240.25}$?	( ) 225 cm^2
(c) ¿A cuánto es igual 12^2?	( ) 15.5
(d) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 169?	( ) 15
(e) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados miden 15 cm?	( ) 169 cm^2
(f) ¿A cuánto es igual $\sqrt{225}$?	( ) 13

Comparen sus respuestas y hagan las comprobaciones.

>>> A lo que llegamos

El cuadrado de un número y la raíz cuadrada son operaciones inversas. Esto quiere decir que si a un número se le aplica una operación y después la otra, se obtendrá el número original.

Por ejemplo, el cuadrado del número 15 es: $15^2 = 15 \times 15 = 225$

Y la raíz cuadrada del número 225 es: $\sqrt{225} = 15$

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno encuentra una aproximación para la medida del lado de un cuadrado de área 2 cm^2.

2. Relaciona las dos columnas.

(a) ¿Cuál es el área del cuadrado cuyos lados miden 10 cm?	( ) 196
(b) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 196?	( ) 100 cm^2
(c) ¿Cuánto es 14^2?	( ) 11.5
(d) ¿Cuánto es $\sqrt{256}$?	( ) 16
(e) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados miden 7 cm?	( ) 49 cm^2
(f) ¿Cuánto es $\sqrt{132.25}$?	( ) 14

SESIÓN 2

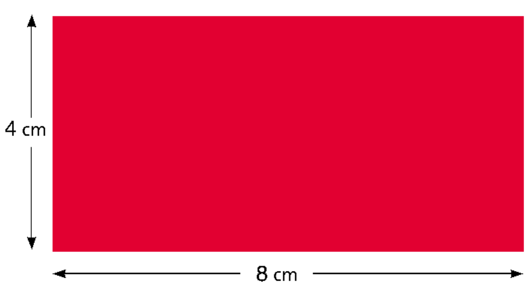
CÁLCULO DE RAÍCES CUADRADAS

>>> Para empezar

Los babilonios y la raíz cuadrada

Existen varios métodos para calcular la raíz cuadrada de un número. En esta sesión aprenderán un método que fue inventado por los antiguos babilonios.

Para obtener la **raíz cuadrada de 32** con el método babilónico, se siguen los siguientes pasos:



1. Se escogen dos números que multiplicados den **32**. Por ejemplo, **8** y **4**.

2. Se construye un rectángulo de área **32 cm^2** y lados **8 cm** y **4 cm** (rectángulo rojo).

   A partir de ahora se encuentran rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado de área **32 cm^2**. Vean cómo se hace esto:

3. Se promedian las medidas de los lados del rectángulo:

$$\frac{8\text{ cm} + 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}$$

4. Se construye otro rectángulo (más parecido a un cuadrado) que tenga un lado que mida **6 cm**, ¿cuánto debe medir el otro lado para que el área del rectángulo sea **32 cm²**? ________. Con estas medidas se construyó el rectángulo azul.

   Observen que:

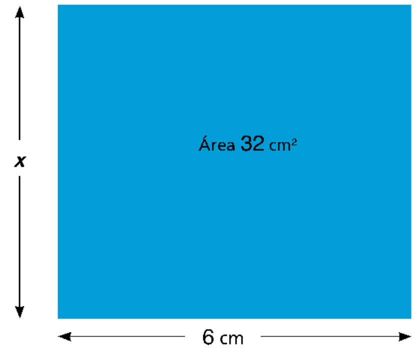
   El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de sus lados. Entonces, si conocen el área (**32 cm²**) y la medida de uno de los lados (**6 cm**) la medida del otro lado (**x cm**) se puede obtener resolviendo la ecuación: $6x = 32$

5. Se vuelven a promediar las medidas de los lados del rectángulo:

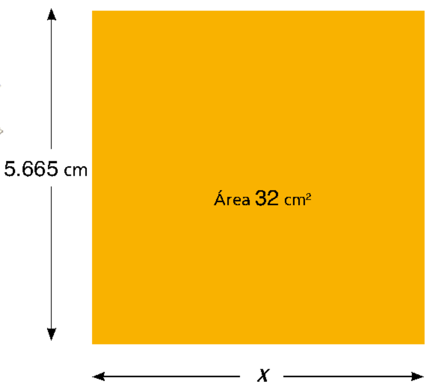
$$\frac{6 \text{ cm} + 5.33 \text{ cm}}{2} = 5.665 \text{ cm}$$

6. Se construye otro nuevo rectángulo (rectángulo anaranjado) que tenga un lado que mida **5.665 cm** y otro que mida **32** entre **5.665**, es decir **5.648 cm.**

Recuerden que:
Para hacer sus cálculos pueden usar aproximaciones.
Por ejemplo, al hacer la división $32 \div 6$ pueden usar el número decimal 5.33 o 5.333



Se puede seguir con esta construcción y acercarse cada vez más al valor exacto de la raíz de **32**. Por el momento, se detendrá aquí el proceso para observar que el rectángulo anaranjado es casi un cuadrado. Sus lados miden: **5.665 cm** y **5.648 cm**.



Calculen (pueden usar una calculadora):

$\mathbf{5.665^2}$ = ____________

$\mathbf{5.648^2}$ = ____________

¿Cuál de los dos números es una mejor aproximación a $\sqrt{32}$? ______________________

Los lados del rectángulo azul midieron **6 cm** y **5.33 cm**. Calculen (pueden usar calculadora):

$\mathbf{6^2}$ = ________________

$\mathbf{5.33^2}$ = ______________

Comenten:

¿Qué rectángulo da mejores aproximaciones a $\sqrt{32}$, el azul o el anaranjado? ___________

>>> Consideremos lo siguiente

Con el método babilónico se puede calcular la raíz cuadrada de cualquier número. Siguiendo los pasos de este método, calculen la raíz cuadrada de **7.3**

Pueden usar su calculadora para hacer las operaciones que se indican y una regla para hacer los dibujos de los rectángulos.

1. Se escogen dos números que multiplicados den **7.3**
   Háganlo con **1** y **7.3**
2. Dibujen en sus cuadernos un rectángulo de lados **1 cm** y **7.3 cm**.
   Ahora van a encontrar rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado.
3. Obtengan el promedio de **1 cm** y **7.3 cm**, ¿cuánto es? ____________________
   Éste es uno de los lados del nuevo rectángulo.
4. ¿Cuánto mide el otro lado del rectángulo? ____________________
   Para encontrar esta medida pueden resolver la ecuación: $4.15x = 7.3$
   Dibujen en sus cuadernos un rectángulo que tenga las medidas que acaban de encontrar.
   Pueden seguir con el método para encontrar rectángulos cada vez más parecidos a un cuadrado de área **7.3 cm²**
5. Obtengan el promedio de **4.15 cm** y **1.759 cm**, ¿cuánto es? ____________________
   Éste es uno de los lados del otro rectángulo.
6. Si saben que **7.3 ÷ 2.95** es aproximadamente **2.474**, ¿cuánto mide el otro lado del nuevo rectángulo? ____________________
   Dibujen en sus cuadernos un rectángulo que tenga las medidas que acaban de encontrar.
7. Encuentren el siguiente rectángulo y dibújenlo en sus cuadernos.

Comparen las medidas que obtuvieron siguiendo los pasos del método babilónico. Comenten:

¿Cuánto es $\sqrt{7.3}$? ____________________

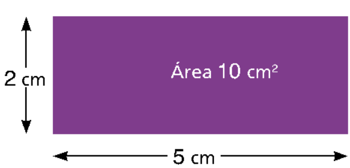
>>> Manos a la obra

I. Calcula por pasos la raíz cuadrada de **10** con el método babilónico.

1. Se escogen dos números cuya diferencia sea la menor posible y cuyo producto sea igual a **10**, es decir, el **2** y el **5**.

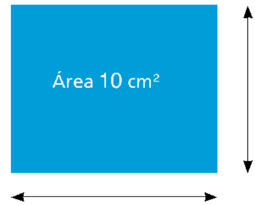
Observa que:

Podrías escoger el **1** y el **10**, pero los lados del rectángulo serían muy distintos: medirían **1 cm** y **10 cm**. En cambio, si escoges **2** y **5**, el rectángulo que obtienes se parece más a un cuadrado.



2. Se construye un rectángulo de área **10 cm²** y lados **2 cm** y **5 cm** (rectángulo morado).

Se construye otro rectángulo de área **10 cm**, pero más parecido a un cuadrado.



3. Se obtiene el promedio entre **2** y **5**, sumando **2** más **5** y dividiendo entre 2. El promedio es: ______________________. Éste es uno de los lados del nuevo rectángulo (rectángulo azul).

4. Si sabes que **10 ÷ 3.5** es aproximadamente **2.86**, ¿cuánto mide el otro lado del nuevo rectángulo? ______________________

El método se puede continuar para aproximar mejor $\sqrt{10}$, encontrando rectángulos de área **10 cm²** cada vez más parecidos a un cuadrado.

Calcula:

2.86² = ______________________

3.5² = ______________________

¿Qué número usarías para una mejor aproximación de $\sqrt{10}$? ______________________

Comparen sus aproximaciones. ¿Cuál es la mejor? ______________________

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno, calcula la raíz cuadrada de **18**. Obtén **3** rectángulos de área **18 cm²** siguiendo los pasos del método babilónico.

2. Completa la siguiente tabla para calcular la raíz cuadrada de números enteros y decimales. Si el resultado es un número decimal, utiliza sólo dos cifras decimales para tus respuestas. Puedes usar una calculadora.

Número	Raíz cuadrada
25	
1	
	0.1
0.25	

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado tiene **0.1 cm** de longitud? ______________

b) ¿Cuál es la longitud del lado de una figura de **0.25 cm²** de área? ______________

¿CUÁNTOS TATARABUELOS?

>>> Para empezar

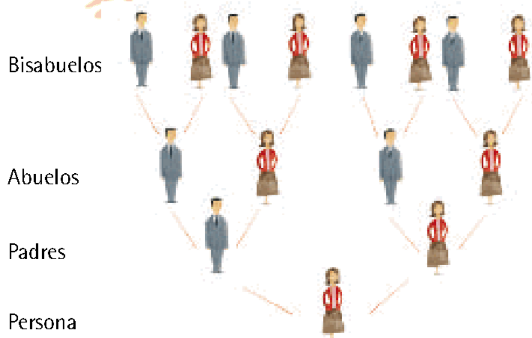
Un árbol genealógico es una representación gráfica de la historia familiar de una persona. En un árbol genealógico aparecen los antepasados de cada persona, es decir, sus padres, abuelos, bisabuelos (padres de los abuelos), tatarabuelos (padres de los bisabuelos), etc. Diremos que los padres son la primera generación de antepasados, que los abuelos son la segunda generación de antepasados, etcétera.

>>> Consideremos lo siguiente

En una familia, los bisabuelos son los papás de los abuelos, y los tatarabuelos son los papás de los bisabuelos. ¿Cuántos tatarabuelos hay en el árbol genealógico de una persona?

>>> Manos a la obra

I. El siguiente árbol genealógico puede servir para encontrar cuántos tatarabuelos tiene una persona. Copien el árbol en sus cuadernos y dibujen a los tatarabuelos. ¿Cuántos son? ________________



a) Si quieren continuar con el árbol genealógico, ¿cuántos antepasados habría en la siguiente rama hacia arriba? Es decir, ¿cuántos antepasados hay en la quinta generación? ________________ . Dibújenlos en sus cuadernos.

b) ¿Cuántos antepasados de la sexta generación tiene una persona? ____________

c) ¿Y cuántos antepasados tiene en la séptima generación? ____________

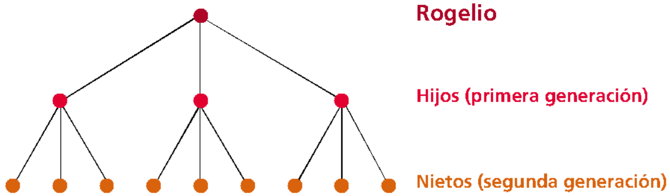
d) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones les permite encontrar el número de antepasados de la séptima generación?

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Comparen sus respuestas y expliquen cómo las encontraron.

II. Los descendientes de una persona son sus hijos, nietos, bisnietos, tataranietos, etc. Supongan que Rogelio tiene 3 hijos (primera generación de descendientes) y cada uno de sus hijos tiene a su vez 3 hijos (segunda generación de descendientes), de los cuales cada uno tiene 3 hijos (tercera generación de descendientes) y así sucesivamente. Es decir, cada miembro de la familia tendrá exactamente 3 hijos.

a) Completen el siguiente diagrama de árbol hasta la tercera generación de descendientes:



b) ¿Cuántos descendientes tendrá Rogelio en la tercera generación? ____________

c) ¿Cuántos descendientes tendrá Rogelio en la sexta? ____________

d) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones permite calcular el número de descendientes de la novena generación?:

- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

e) Si en lugar de tener 3 hijos, cada quien tuviera 5 hijos, ¿cuántos descendientes tendría Rogelio en la cuarta generación? ____________

f) ¿Y en la octava? ____________

g) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones permite encontrar el número de descendientes en la duodécima generación?

- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

>>> A lo que llegamos

Una **potencia** es la multiplicación de un número por sí mismo varias veces.
Por ejemplo, en el problema de los árboles genealógicos:

2^{10} es la multiplicación $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

2^{10} se llama **la décima potencia de 2** y se lee **2 elevado a la 10** o **2 a la 10**.

2 es la **base** y **10** es el **exponente**.

5^9 es la multiplicación $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$.

5^9 se llama **la novena potencia de 5** y se lee **5 elevado a la 9** o **5 a la 9**.

5 es la **base** y **9** es el **exponente**.

III. Completen la siguiente tabla de potencias y contesten:

Número n	Cuadrado n^2	Tercera potencia n^3	Cuarta potencia n^4
3			81
4		64	
10			10 000
	0.25	0.125	
1.5			
	144		20 736

a) ¿Qué número multiplicado 3 veces por él mismo da 27? __________

b) ¿Qué número tiene tercera potencia igual a 1 000? __________

c) ¿Qué número tiene segunda potencia igual a 0.25? __________

d) ¿Qué número tiene raíz cuadrada igual a 144? __________

e) ¿Qué número tiene cuarta potencia igual a 256? __________

>>> A lo que llegamos

- La **raíz cúbica** de **64** es **4**, porque $4^3 = 64$. La **raíz cúbica** de **64** se escribe así: $\sqrt[3]{64}$

  En general, la **raíz cúbica** de un número k es otro número que tiene tercera potencia igual a k.

- La **raíz cuarta** de **81** es **3**, porque $3^4 = 81$. La **raíz cuarta** de **81** se escribe así: $\sqrt[4]{81}$

  En general, la **raíz cuarta** de un número k es otro número que tiene cuarta potencia igual a k.

f) ¿Cuál es la raíz cúbica de 1 000? ______________________

g) ¿Cuál es la raíz cuarta de 10 000? ______________________

h) La raíz ______________________ de 2.25 es 1.5

>>> Lo que aprendimos

1. Completa la siguiente tabla de potencias y contesta:

Número n	Cuadrado n^2	Tercera potencia n^3	Cuarta potencia n^4
0.2			0.0016
	0	0	0
1			
1.1	1.21		1.4641
	4	8	
11		1 331	

a) ¿Cuál es la raíz cúbica de 0.008? ______________________

b) ¿Cuál es la raíz cúbica de 0? ______________________

c) ¿Cuál es la raíz cuarta de 1.4641? ______________________

d) ¿Cuál es la raíz cuarta de 1? ______________________

2. Si la raíz cúbica de 8 es 2 y la de 27 es 3, encuentra una aproximación con dos cifras decimales de la raíz cúbica de 20.

3. Completa.

a) En la potencia 7^6, la base es ______ y el exponente es ______ .

b) En la potencia ______ , la base es 8 y el exponente es 13.

c) Al escribir $6 \times 6 \times 6 \times 6$ como potencia, la base es ______ y el exponente es ______ .

>>> Para saber más

Sobre el árbol genealógico consulta:
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/historia/histdeltiempo/pasado/famili/p_arbol.htm
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Red Escolar, Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

Relación funcional

En esta secuencia analizarás en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas y representarás esta relación mediante una tabla y una expresión algebraica.

SESIÓN 1

LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO

>>> Para empezar

La expansión del Universo.

Hasta principios del siglo XX los astrónomos pensaron que el Universo había sido siempre del mismo tamaño. Sin embargo, en 1929, el astrónomo Edwin Hubble observó que las galaxias se están alejando unas de otras. Este descubrimiento confirmó una teoría de extraordinaria importancia para la ciencia: la teoría de la Expansión del Universo.

A la velocidad con la que una galaxia se aleja de la Tierra se le llama velocidad de alejamiento y, de acuerdo con el descubrimiento de Hubble, las galaxias que están más lejos de la Tierra son también las que se alejan a mayor velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

Una galaxia que está a 1 megaparsec de distancia se aleja de la Tierra a una velocidad de 50 km/s; otra galaxia que está a 2 megaparsecs se aleja de la Tierra a una velocidad de 100 km/s, y así sucesivamente.

El megaparsec es una unidad que se usa para medir distancias astronómicas.

1 megaparsec es igual a 3.082×10^{18} km que equivale a 3.26 millones de años luz.

A partir de esta información, contesten las siguientes preguntas:

a) ¿A qué velocidad se aleja una galaxia que está a 3 megaparsecs de distancia? ____

____

b) ¿A qué velocidad se aleja una galaxia que está a 6 megaparsecs de distancia? ____

____

c) Representen con la letra ***d*** la distancia en megaparsecs a la que se encuentra una galaxia, y con ***v*** a la velocidad de alejamiento, ¿qué expresión algebraica usarían para encontrar la velocidad de alejamiento a partir de la distancia? ____________

____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar la velocidad con la que se alejan algunas galaxias a partir de las distancias a las que se encuentran.

Distancia (en megaparsecs)	**Velocidad de alejamiento (en km/s)**
1	50
2	100
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
15	
	1000
25	
	1500

a) Para encontrar la velocidad de alejamiento se multiplica la distancia por un número, ¿cuál es ese número? ____________________

b) Completen la siguiente expresión algebraica para encontrar la velocidad de alejamiento v a partir de la distancia d:

$$v = \boxed{} \times d$$

Comparen sus expresiones algebraicas y comenten:

La velocidad de alejamiento es directamente proporcional a la distancia a la que está la galaxia, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar la velocidad de alejamiento a partir de la distancia?

II. Usen la expresión algebraica que encontraron para hacer los siguientes cálculos:

a) Si la distancia es igual a 50 megaparsecs, ¿cuál es la velocidad de alejamiento v (en km/s)? ____________________

b) Si d = 600 megaparsecs, ¿cuál es la v (en km/s)? ____________________

c) Si d = 100 megaparsecs, ¿cuál es la v (en km/s)? ____________________

>>> A lo que llegamos

Recuerden que:
Por convención,
$v = 50 \times d$
se escribe
$v = 50d$

En la expresión algebraica $v = 50d$, conocida como Ley de Hubble, la velocidad de alejamiento **depende** o **está en función** de la distancia. Según dicha fórmula, para encontrar la velocidad de alejamiento se multiplica la distancia por 50. Se dice entonces que entre la velocidad y la distancia hay una **relación funcional**. En este caso, la relación funcional es una relación de proporcionalidad.

III. Contesten las siguientes preguntas:

a) Si la galaxia Centauro se encuentra a 1.31 megaparsecs y la galaxia Andrómeda a 0.7 megaparsecs, ¿cuál de las dos se aleja más rápidamente de la Tierra?

____

b) Si una galaxia se aleja a 5 km/s, ¿a qué distancia estará? ____________

c) ¿A qué distancia estará una galaxia que se aleja a 1 km/s? ____________

d) ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permite encontrar la distancia (***d***) a partir de la velocidad de alejamiento (***v***)? Subráyenla.

$d = 50v$ $\qquad$ $d = 50 \div v$ $\qquad$ $d \div 50 = v$ $\qquad$ $d = v \div 50$

Comparen sus respuestas. Usen la expresión algebraica para verificarlas.

>>> A lo que llegamos

En las relaciones funcionales hay cantidades que **varían** y otras que **no varían**. En la relación funcional dada por la **Ley de Hubble**:

- La distancia d a la que se encuentra cada galaxia **varía**.
- La velocidad v con la que se aleja una galaxia **varía**, dependiendo de la distancia.
- El **número 50** por el que se multiplica la distancia para encontrar la velocidad **no varía**.

A las cantidades que varían se les llama **variables**, y a las que no varían se les llama **constantes**. En este caso:

- **50** es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la variable v a partir de la variable d.
- $\frac{1}{50}$ es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la variable d a partir de la variable v.

>>> Lo que aprendimos

1. Un atleta corre la tercera parte de un kilómetro por minuto.

a) Completen la siguiente tabla para calcular la distancia que recorre el atleta en diferentes momentos de una carrera.

Tiempo (en minutos)	Distancia recorrida (en kilómetros)
1	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{3}$
3	
	$\frac{4}{3}$
5	
	2
10	
11	
60	

b) Si d es la distancia que recorre el atleta y t el tiempo transcurrido, escriban una expresión algebraica para calcular la distancia que recorre el atleta al variar el tiempo.

____

c) Utilicen la expresión algebraica para responder las siguientes preguntas:

- Si t = **10** minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________
- Si t = **12** minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________
- Si t = **22** minutos, ¿cuánto es d en kilómetros? _______________

En esta relación funcional:

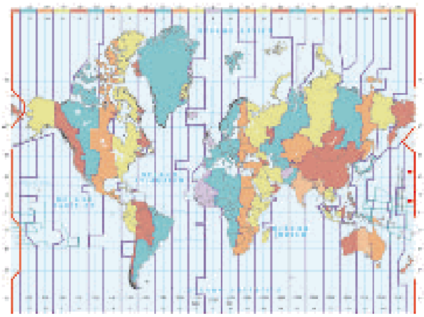
d) ¿Cuáles son las **variables**? _______________ y _______________

e) ¿Cuál es la **constante de proporcionalidad** que permite encontrar la distancia a partir del tiempo? _______________

SESIÓN 2

LOS HUSOS HORARIOS

>>> Para empezar



Debido al movimiento de rotación de la Tierra, hay diferencias de horario. ¡Esto quiere decir que mientras en un lugar del mundo son las 12 del día, en otro son las 12 de la noche!

Por ejemplo, cuando en la ciudad de Nueva York en EEUU son las 7:00 h (7 de la mañana), en la ciudad de Chihuahua en México son las 6:00 h (6 de la mañana).

Para calcular las horas, el planeta Tierra se ha dividido en 24 franjas llamadas **husos horarios**. A cada uno de los husos horarios le corresponde una hora distinta, de manera que en el planeta hay 24 horas distintas al mismo tiempo. Así, cuando en Nueva York son las 00:00 h (12 de la noche) en Chihuahua son las 23:00 h (11 de la noche).

Es importante notar que es común decir 24:00 h o 12 de la noche en lugar de 0:00 h. En el momento en que se completan 24 horas de un día se reinicia el conteo a 0:00 h (un minuto después de las 23 h con 59 min vienen otra vez las 0:00 h), por lo tanto, las 0:00 h y las 24:00 h son dos formas de escribir la misma hora.

>>> Consideremos lo siguiente

Comenten el siguiente problema:

María vive en la ciudad de Chihuahua y su papá en la ciudad de Nueva York. Si el papá de María trabaja de 7 de la mañana (7:00 h) a 3 de la tarde (15:00 h), ¿creen que María encontrará a su papá en casa si lo llama a las 6 de la mañana (hora de Chihuahua)?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular la hora en la ciudad de Nueva York a partir de la hora en Chihuaha.

Hora en Chihuahua	Hora en Nueva York
6	7
7	8
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

a) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 15:00 h?

____

b) Si el papá de María hace una hora cuarenta y cinco minutos en el trayecto del trabajo a su casa, ¿a partir de qué hora (de Chihuahua) puede hablarle María para encontrarlo de regreso en casa?

____

c) ¿De qué hora a qué hora de Chihuahua, María no va a encontrar a su papá? ¡Cuidado: la respuesta no es de 7 de la mañana a 3 de la tarde!

____

II. Llamen x a la hora en Chihuahua y y a la hora en Nueva York. Si la hora en Chihuahua está entre las 00:00 h y las 23:00 h, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular la hora de Nueva York a partir de la hora de Chihuahua? Subráyenla.

a) $x = y + 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$ d) $x = y - 1$

Comparen sus expresiones algebraicas.

III. Si la hora en Chihuahua está entre 23:00 h y 24:00 h, por ejemplo las 23:30 h, la expresión algebraica $y = x + 1$ NO permite encontrar la hora en Nueva York (y) a partir de la hora en Chihuahua (x), pues se pasa de las 24:00 h.

a) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 23:00 h y las 24:00 h, ¿qué cálculos hay que hacer para obtener la hora en Nueva York a partir de la hora en Chihuahua?

____

b) Escriban una expresión que nos permita encontrar la hora de Nueva York (y) a partir de la hora en Chihuahua (x), cuando la hora en Chihuahua está entre las 23:00 h y las 24:00 h. ____________________________

Comparen sus expresiones.

IV. Para obtener la hora de Nueva York a partir de la hora de Chihuahua, cuando en Chihuahua pasan de las 23:00 horas, se resta 23 a la hora de Chihuahua. Por ello, la expresión es $y = x - 23$. Usando la expresión algebraica $y = x + 1$ (o bien, la expresión $y = x - 23$), contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 23:45 h? ______________

b) ¿Qué hora es en Chihuahua si en Nueva York son las 0:30 h? ______________

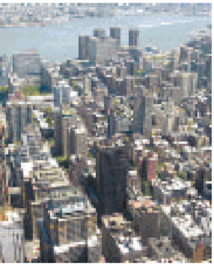
c) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 22:59 h? ______________

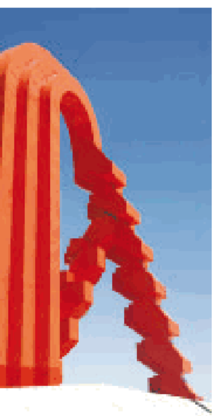
d) ¿Qué hora es en Nueva York si en Chihuahua son las 0:00 h? ______________

>>> A lo que llegamos

En la expresión algebraica $y = x + 1$, la variable y **depende** o **está en función** de la variable x. Al número **1**, que siempre hay que sumar a la x para obtener la y, se le llama **constante**.

V. Cuando en Los Ángeles son las 4:00 h, en Chihuahua son las 6:00 h y en Tokio (la capital de Japón) son las 21:00 h. Completen la siguiente tabla para calcular las horas en Los Ángeles y Tokio a partir de la hora en Chihuahua.





Hora en Los Ángeles	Hora en Chihuahua	Hora en Tokio
4	6	21
5	7	22
	8	
	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	18	
	19	

a) ¿Qué hora es en Los Ángeles cuando son las 20 h en Chihuahua? ____________

b) ¿Qué hora es en Tokio cuando son las 0 h en Los Ángeles? ____________

c) Escriban una expresión algebraica para encontrar la hora en Los Ángeles a partir de la hora en Chihuahua, cuando la hora en Chihuahua está entre las 02:00 h y las 24:00 h. Llámenle x a la hora en Chihuahua y y a la hora en Los Ángeles.

____

d) Llamen x a la hora en Chihuahua y z a la hora en Tokio. Escriban una expresión algebraica para encontrar la hora en Tokio a partir de la hora en Chihuahua en cada caso:

i) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 00:00 h y las 9:00 h.

____

ii) Cuando la hora en Chihuahua está entre las 09:00 h y las 24:00 h.

____

Comparen sus expresiones algebraicas.

VI. Contesten las siguientes preguntas, usando las expresiones algebraicas que encontraron.

a) Si en Chihuahua son las 24:00 h, ¿qué hora es en Los Ángeles? ____________

b) Si en Chihuahua son las 3:00 h, ¿qué hora es en Los Ángeles? ____________

c) Si en Chihuahua son las 9:00 h, ¿qué hora es en Tokio? ____________

d) Si en Tokio son las 24:00 h, ¿qué hora es en Chihuahua? ____________

>>> A lo que llegamos

En la expresión algebraica $y = x - 2$, la variable y depende o está en función de la variable x. El número 2, que siempre hay que restar a la x para obtener la y, es la constante de la relación funcional.

VII. La expresión algebraica $z = x + 15$ describe una relación funcional entre la hora en Chihuahua (x) y la hora en Tokio (z).

a) ¿Cuáles son las **variables** en esta relación funcional?

b) ¿Cuál es la **constante** en esta relación funcional?

>>> Lo que aprendimos

1. Luis tiene tres hermanos: Rocío, Juan y Fernanda. Completen la siguiente tabla con las edades de los hermanos de Luis.

Edad de Luis (años)	Edad de Rocío (años)	Edad de Juan (años)	Edad de Fernanda (años)
6	10	8	1
7	11	9	2
8	12	10	3
10		12	5
12	16	14	
13		15	8
14	18		
20			
25		27	

a) Cada integrante del equipo escoja a uno de los hermanos de Luis y escriba en su cuaderno una expresión algebraica para calcular la edad del hermano que escogió a partir de la edad de Luis.

b) Verifiquen entre todos si las tres expresiones algebraicas (una para cada hermano) son correctas.

c) En conjunto, en las expresiones que encontraron hay cuatro **variables** distintas, ¿cuáles son?

____________, ____________, ____________ y ____________

d) ¿Cuáles son las **constantes** en estas relaciones funcionales?

____________, ____________ y ____________

2. La longitud de la base de un rectángulo es 3 cm más grande que su altura.

a) ¿Cuánto medirá la base si la altura mide 2 cm? ____________

b) Y si la base midiera 6 cm, ¿cuánto mediría la altura? ____________

c) Encuentra una expresión algebraica para calcular la medida de la altura a partir de la medida de la base. ____________

d) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional? ____________

e) ¿Cuál es la constante? ____________

SESIÓN 3

COCINA NAVIDEÑA

>>> Para empezar

Existen muchos problemas prácticos en los que interviene una relación funcional. En esta sesión abordaremos algunos de ellos.

>>> Consideremos lo siguiente

En un libro de cocina aparece la siguiente receta para cocinar un pavo:

PAVO AL HORNO

Envuelva el pavo en papel aluminio; hornee el pavo 15 minutos por cada kilogramo de pavo y sume a esto 90 minutos extras.

a) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo de 5 kg?

____

b) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo que pesa 8 kg? ____________

c) ¿Cuánto tiempo de horneado requiere un pavo que pesa 6.5 kg? ____________

d) Escriban una expresión algebraica para calcular el tiempo de horneado de un pavo de cualquier peso.

____

Comparen sus expresiones algebraicas.

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular el tiempo de horneado que requiere un pavo con diferentes pesos:

Peso del pavo (kg)	Tiempo de horneado (min)
1	105
2	
2.5	
3	
4	
	157.5
6	
6.5	
	195
10	

a) En esta relación funcional hay un número por el cual se multiplica cada kilogramo de pavo, ¿cuál es ese número? ______

b) ¿Cuál es el número que hay que sumar siempre para obtener el tiempo total de horneado? ______

c) Completen la siguiente expresión algebraica para encontrar el tiempo ***t*** a partir del peso ***p***:

$$t = \boxed{} \times p + \boxed{}$$

II. Comparen sus expresiones algebraicas y comenten.

a) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional?

b) ¿Cuáles son las constantes en esta relación funcional?

III. Usen la expresión algebraica que encontraron para calcular los tiempos de horneado de pavos con los siguientes pesos:

a) Si el pavo pesa 2.5 kg, ¿cuántos minutos debe hornearse? ______

b) Si p = **3.75** kg, ¿cuánto vale t (en minutos)? ______

c) Si p = **8.4** kg, ¿cuánto vale t (en minutos)? ______

IV. Comparen sus respuestas y contesten las siguientes preguntas:

a) Si un pavo pesa 9 kg y otro pesa 3 kg, ¿cuánto tiempo de horneado más necesita el pavo de 9 kg? ______________________________

b) Si un pavo pesa el triple que otro, ¿será cierto que el tiempo de horneado que requiere el más chico es la tercera parte de lo que requiere el mayor? __________

¿Por qué? ______________________________

>>> A lo que llegamos

La expresión algebraica $t = 15\,p + 90$ es una relación funcional: el valor de la variable t depende del valor de la variable p.

La variable p se multiplica por 15 y al resultado se le suma 90. Ambos números, el 15 y el 90, son constantes.

V. En otra receta se sugiere hornear 16 minutos por cada kilogramo de pavo y agregar 80 minutos extras. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas permitiría encontrar el tiempo total de horneado (t) para cualquier cantidad de kilogramos de pavo (p)?

Recuerden que:
Se acostumbra suprimir el símbolo **×** *(por) para no confundirlo con la* **x** *(equis).*

- $t = 80\,p + 16$
- $t = 16\,p + 80$

a) ¿Cuáles son las variables en esta relación funcional? __________ y __________

b) ¿Cuáles son las constantes? __________ y __________

>>> Lo que aprendimos

En la expresión algebraica $y = 3\,x + 1$

a) ¿Cuáles son las variables? __________

y __________

b) ¿Cuáles son las constantes? __________

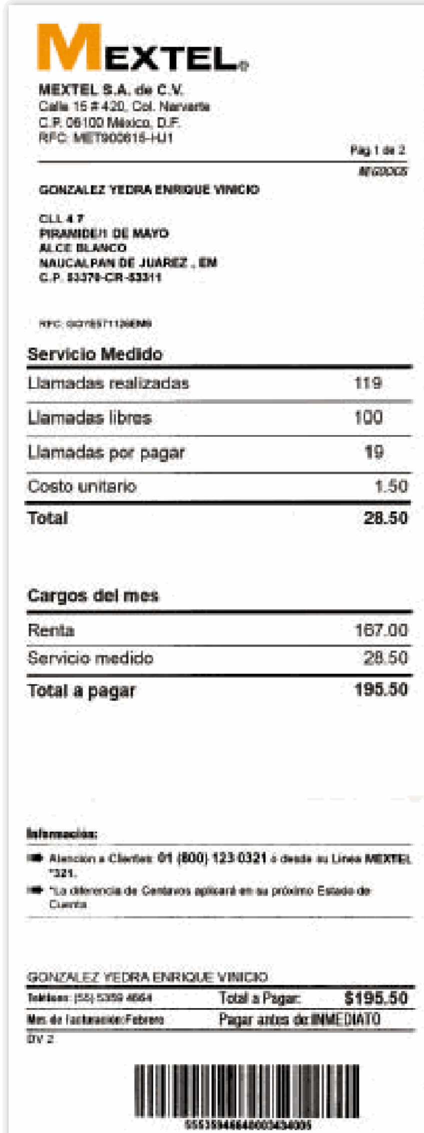
y __________

c) Completen la tabla de la derecha usando la expresión algebraica:

x	y
1	
1.5	
2	
5	
10	
11.6	
20	
	76

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás con el estudio de las relaciones funcionales. Estudiarás un problema práctico: el costo mensual del servicio telefónico. El costo del servicio telefónico depende de la renta fija y de la cantidad de llamadas que se realicen en el mes.



MEXTEL

MEXTEL S.A. de C.V.
Calle 15 # 420, Col. Narvarte
C.P. 06100 México, D.F.
RFC: MET900615-HJ1

Pág 1 de 2

GONZALEZ YEDRA ENRIQUE VINICIO

CLL 4 7
PIRAMIDE/1 DE MAYO
ALCE BLANCO
NAUCALPAN DE JUAREZ , EM
C.P. 53370-CR-53311

Servicio Medido

Llamadas realizadas	119
Llamadas libres	100
Llamadas por pagar	19
Costo unitario	1.50
Total	**28.50**

Cargos del mes

Renta	167.00
Servicio medido	28.50
Total a pagar	**195.50**

Información:

- Atención a Clientes: 01 (800) 123 0321 ó desde su Línea MEXTEL *321.
- "La diferencia de Centavos aplicará en su próximo Estado de Cuenta

GONZALEZ YEDRA ENRIQUE VINICIO

Teléfono: (55) 5359 4664 Total a Pagar: $195.50
Mes de facturación: Febrero Pagar antes de: INMEDIATO
DV 2

>>> Consideremos lo siguiente

La renta mensual del servicio telefónico es de $167.00. Esta renta incluye 100 llamadas. Por ejemplo, si en el recibo aparecen 125 llamadas realizadas, se paga: la renta mensual más el costo de las 25 llamadas adicionales. El costo de cada llamada adicional es de $1.50.

a) ¿Cuál es el costo mensual del servicio si se hacen 125 llamadas?

b) Completen la siguiente tabla para calcular el costo mensual del servicio telefónico a partir del número de llamadas.

Total de llamadas realizadas	Costo mensual (en pesos)
100 o menos	167
101	168.50
110	
119	
120	
121	
125	
150	
168	
175	
180	

c) ¿Cuál es el mayor número de llamadas que se pueden hacer con $200.00?

Comparen sus resultados y comenten sus procedimientos.

¿Qué operaciones hicieron para encontrar los costos a partir del número de llamadas?

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas:

a) Si sólo se pagan \$167.00 (la renta mensual), ¿cuántas llamadas se han hecho?

____

b) ¿Cuánto hay que pagar de costo mensual por 1 llamada adicional? _______________.

c) ¿Cuánto hay que pagar por 2 llamadas adicionales? _______________.

d) Si se hacen 181 llamadas en total, ¿cuántas llamadas adicionales se han hecho?

_______________ ¿Cuánto hay que pagar de costo mensual? _______________ .

II. ¿Con cuál de las siguientes expresiones algebraicas se puede calcular el costo mensual del servicio telefónico cuando se hacen más de 100 llamadas? En estas expresiones se usa la letra x para representar el total de llamadas y la letra y para representar el costo mensual del servicio telefónico.

El paréntesis de la expresión

$y = 1.50\ (x - 100) + 167$

indica que primero hay que restar **100** *al número* x *y, después, multiplicar el resultado por* **1.50**

$$y = 1.50\ x + 167$$

$$y = 167\ x + 1.50$$

$$y = 1.50\ (x - 100) + 167$$

a) Comparen las expresiones algebraicas que escogieron y comenten por qué creen que son correctas.

b) Con la expresión que escogieron calculen el costo mensual del teléfono, si en el recibo estuvieran registrados los siguientes números totales de llamadas:

$x = 100$, $y =$ _______________

$x = 121$, $y =$ _______________

$x = 125$, $y =$ _______________

$x = 175$, $y =$ _______________

$x = 200$, $y =$ _______________

$x = 250$, $y =$ _______________

c) Comparen sus resultados con los que obtuvieron en la tabla, y comenten:

Si el número de llamadas aumenta al doble, ¿también aumentará al doble el costo mensual?

III. El costo mensual del teléfono depende del número total de llamadas que se realizan. Ésta es una relación funcional. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las variables? ______________ ______________

b) En esta relación funcional hay tres constantes, ¿cuáles son?

______________ ______________ ______________

>>> Lo que aprendimos

Un bebé nació pesando 3 kg. Durante su primer año de vida su peso aumentó 0.5 kg cada mes.

Completa la siguiente tabla para calcular el peso del bebé.

Edad del bebé (meses)	Peso del bebé (kilogramos)
Al nacer	3
1	
2	
3	
4	
5	
6	6
7	6.5
8	7
9	7.5

a) Si se representa con la letra y el peso del bebé y con x la edad del bebé (en meses), escribe una **expresión algebraica** para calcular el peso del bebé durante su primer año de vida. ______________________________

b) Utiliza la expresión algebraica para calcular el peso del bebé a partir de las siguientes edades:

x = 7 (meses), y = ______________ kilogramos

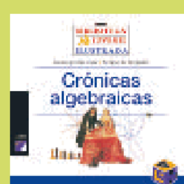
x = 8 (meses), y = ______________ kilogramos

x = 9 (meses), y = ______________ kilogramos

x = 12 (meses), y = ______________ kilogramos

>>> Para saber más

Sobre la expansión del Universo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Concepción Ruiz y Sergio de Régules. *Crónicas algebraicas*. México: SEP/ Santillana, Libros del Rincón, 2002, pp. 44-45.



También puedes consultar:
http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/01/html/sec_11.html
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Construcción de círculos y circunferencias

En esta secuencia construirás círculos que cumplan condiciones dadas a partir de diferentes datos.

SESIÓN 1

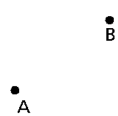
LAS CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS

>>> Para empezar

Una **circunferencia** está formada por todos los puntos que están a la misma distancia, llamada **radio**, de un punto fijo llamado **centro.**

>>> Consideremos lo siguiente

Tracen dos circunferencias que cumplan la siguiente condición: pasar por los dos puntos siguientes.



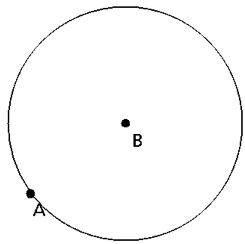
Escriban en su cuaderno cómo encontraron los puntos que utilizaron como centro de cada circunferencia.

Comenten en grupo sus procedimientos.

>>> Manos a la obra

I. Rosa consideró los dos puntos de la siguiente manera:

- Tomó como centro el punto B y trazó la circunferencia tomando como radio la distancia del punto A al punto B.



¿Por qué esta circunferencia **no** cumple la condición pedida? ______________________

____

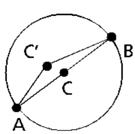
____

II. Para hallar las dos circunferencias, Guillermo hizo lo siguiente.
Para la primera circunferencia:

- Trazó el segmento que une los dos puntos, obtuvo el punto medio del $\overline{AB}$ (punto C) y trazó la circunferencia tomando como radio la distancia del punto C al punto A.

Comenten en equipo, ¿por qué esta circunferencia **sí** cumple la condición pedida?

Para hallar el centro de la segunda circunferencia, Guillermo tomó un punto C' muy cerca de C.



a) Midan la distancia del punto A al punto C': ______________________

b) Midan la distancia del punto B al punto C': ______________________

Comenten en equipo, ¿por qué el punto C' **no** es el centro de la circunferencia?

III. A continuación se explica una manera de trazar las circunferencias que pasan por A y B.

Tracen primero el segmento que une los puntos A y B:

Recuerden que: El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forma una recta llamada ***mediatriz*** *del segmento.*

a) En la secuencia 12 estudiaron cómo trazar la mediatriz de un segmento. Tracen la mediatriz del $\overline{AB}$.

b) Ubiquen un punto sobre la mediatriz, llámenlo D.

c) Midan lo siguiente:

Distancia del punto A al punto D. ____________________

Distancia del punto B al punto D. ____________________

d) Tracen una circunferencia con centro en D y que pase por A y por B.

e) Ubiquen otros dos puntos sobre la mediatriz (llámenlos E, F) y tracen las circunferencias con esos puntos como centro, y que pasen por A y por B.

f) En las dos circunferencias que acaban de trazar midan las siguientes distancias:

Distancia de A a E. __________ Distancia de B a E. __________

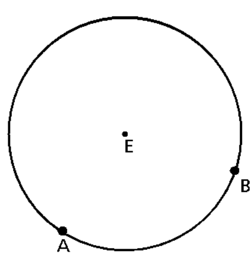
Distancia de A a F. __________ Distancia de B a F. __________

g) Tomen otro punto sobre la mediatriz, ¿cómo son las distancias de ese punto a los puntos A y B? ____________________

Comenten en grupo la siguiente pregunta:

¿Habrá algún otro punto de la mediatriz del $\overline{AB}$ que no sea centro de una circunferencia que pase por A y por B?

IV. En la siguiente circunferencia que pasa por los puntos A y B está marcado su centro (punto E).



a) Tracen el $\overline{AB}$ y su mediatriz.

b) ¿Cómo son las distancias del punto E al punto A y del punto E al punto B? ________

____

Como el punto E equidista de los puntos A y B, entonces está sobre la mediatriz del $\overline{AB}$.

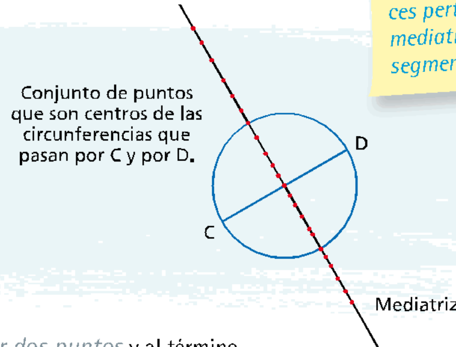
c) Observen que al trazar la mediatriz del $\overline{AB}$, el centro está sobre dicha mediatriz.

d) ¿Cuántas circunferencias pasan por los puntos A y B? ______________________

Recuerden que: Si un punto cualquiera equidista de los extremos del segmento, entonces pertenece a la mediatriz del segmento.

>>> A lo que llegamos

Cada punto de la mediatriz de un segmento $\overline{CD}$ es el centro de una circunferencia que pasa por C y D, y cada circunferencia que pasa por C y D tiene su centro sobre la mediatriz del segmento $\overline{CD}$.



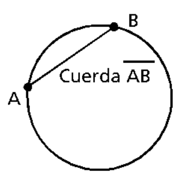
Vean el video *Las circunferencias que pasan por dos puntos* y al término del mismo escriban en su cuaderno, con sus propias palabras, cuántas circunferencias se pueden trazar que pasen por dos puntos dados: C y D.

CUERDAS Y CIRCUNFERENCIAS

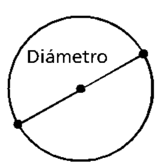
SESIÓN 2

>>> Para empezar

Los segmentos de recta que unen a dos puntos de una circunferencia se llaman **cuerdas**. En la ilustración 1 los puntos A y B están unidos por la cuerda $\overline{AB}$.

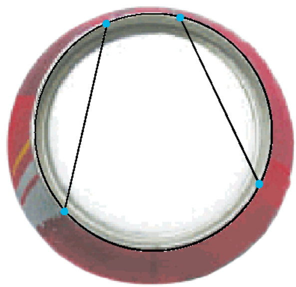


El diámetro de una circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.



>>> Consideremos lo siguiente

Una maquiladora de latas de refresco debe colocar la "lengüeta" exactamente en el centro de la tapa. En el dibujo se muestra una tapa sin la lengüeta, las líneas sirven de guía para poner la lengüeta y son dos cuerdas de la circunferencia.



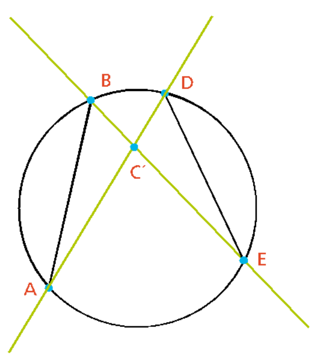
Encuentren el punto de la tapa donde debe colocarse el remache de la lengüeta.

>>> Manos a la obra

I. Veamos dos procedimientos:

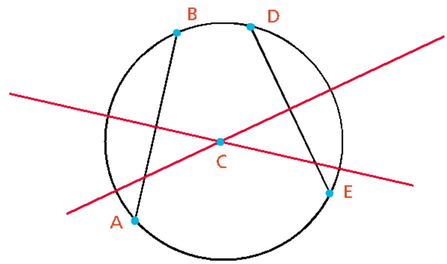
Procedimiento 1

- En el equipo 1 unieron los extremos de las cuerdas y tomaron como centro de la tapa el punto de intersección C´. Dijeron que el remache de la lengüeta debería colocarse en el punto C´.



Procedimiento 2

- En el equipo 2 trazaron las mediatrices de la cuerdas y dicen que el punto de intersección de las mediatrices es donde debe ponerse el remache de la lengüeta.



a) ¿Cuánto miden las distancias del punto C' a los extremos de cada cuerda? Mídanlas y completen:

Distancia de C' a A. ____________________ Distancia de C' a B. ____________________

Distancia de C' a D. ____________________ Distancia de C' a E. ____________________

b) ¿Cuánto miden las distancias del punto C a los extremos de cada cuerda?

Completen:

Distancia de C a A. ____________________ Distancia de C a B. ____________________

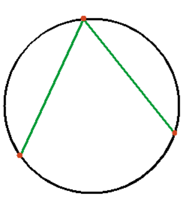
Distancia de C a D. ____________________ Distancia de C a E. ____________________

Comparen sus respuestas y comenten:

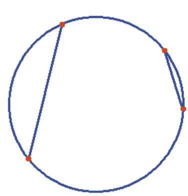
- ¿Por qué el punto C' **no** es el centro de la circunferencia?
- ¿Por qué el punto de intersección C de las dos mediatrices **sí** es el centro de la circunferencia?

II. En las siguientes circunferencias:

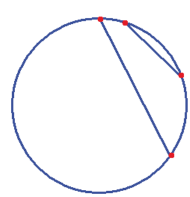
a) Encuentren su centro.



Circunferencia 1

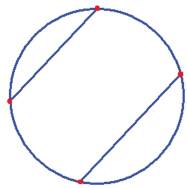


Circunferencia 2

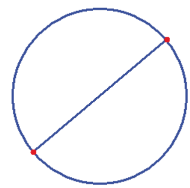


Circunferencia 3

b) Encuentren su centro.



Circunferencia 4



Circunferencia 5

c) En la circunferencia 5 la cuerda dada es un diámetro, ¿cómo obtuvieron su centro?

____

d) En las circunferencias 4 y 6, ¿las mediatrices de las cuerdas se intersectan en un punto, son la misma recta o son rectas paralelas? ____________________

e) La mediatriz que trazaron corta a la circunferencia 4 en dos puntos, llámenlos A y B; obtengan el punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ y llámenlo D.

f) ¿Cómo son las distancias del punto D a cada extremo de la cuerda $\overline{AB}$? Mídanlas y completen:

Distancia de D a A. ____________ Distancia de D a B. ____________

Comparen sus respuestas y comenten:

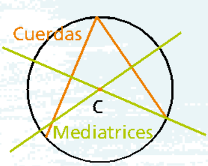
- ¿Por qué la cuerda $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia 4?
- ¿Por qué el punto D es el centro de la circunferencia 4?
- ¿Con este procedimiento podrán encontrar el centro de la circunferencia 6? Háganlo.

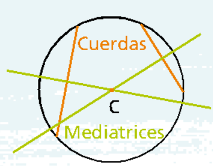
>>> A lo que llegamos

Para encontrar el centro de las circunferencias:

a) Dadas dos cuerdas no paralelas, se traza la mediatriz a cada cuerda y el punto de intersección de las mediatrices trazadas es el centro de la circunferencia.

b) Dadas dos paralelas, se traza la mediatriz a una de las cuerdas, se identifica el diámetro que está sobre la mediatriz, se obtiene el punto medio del diámetro, el cual es el centro de la circunferencia.





>>> Para empezar

En la primera sesión de esta secuencia estudiaste cómo trazar circunferencias que pasen por dos puntos dados. En la segunda sesión estudiaron cómo obtener el centro de una circunferencia dadas dos cuerdas. En esta sesión aprenderás cómo trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados.

>>> Consideremos lo siguiente

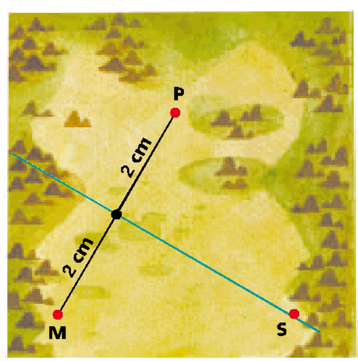
La siguiente ilustración indica los lugares en que se ubican las comunidades de Pochitlán, Mipachán y Sisiján.

Se quiere construir un centro de salud que esté a la misma distancia de todas ellas. Encuentren el sitio donde se debería construir ese centro de salud.

>>> Manos a la obra

I. A continuación se explica una manera de encontrar un punto que equidiste de los tres pueblos.

a) En el siguiente dibujo los pueblos se representan con puntos. Ya se trazó la mediatriz del $\overline{MP}$. La distancia del punto M al punto C (cualquier punto de la mediatriz) es la misma que la distancia del punto P al mismo punto C.



b) Tracen la mediatriz de $\overline{MS}$ y $\overline{PS}$.

c) Localicen el punto de intersección de las mediatrices y llámenlo D. Midan la distancia de D a cada uno de los pueblos:

Distancia de D a M. ____________________

Distancia de D a P. ____________________

Distancia de D a S. ____________________

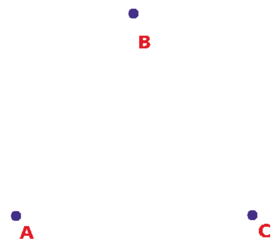
Recuerden que:
El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento forman una recta llamada mediatriz del segmento.

Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Es conveniente construir el centro de salud en el punto D?

b) ¿Para encontrar un punto que equidiste de los puntos M, P y S será necesario trazar las tres mediatrices o será suficiente con trazar dos de ellas?

En el siguiente dibujo tracen dos de las tres mediatrices



a) Llamen F al punto de intersección de las dos mediatrices.

b) ¿Cuáles son las distancias del punto F a los puntos A, B y C?

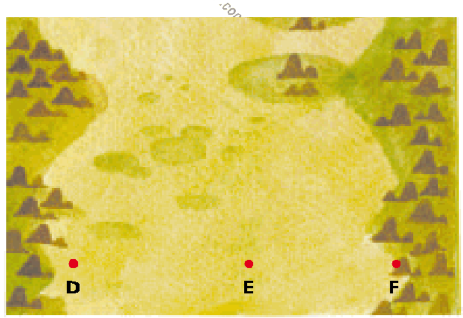
Distancia de F a A. ____

Distancia de F a B. ____

Distancia de F a C. ____

II. En la siguiente ilustración se muestran los lugares en donde se ubican otras tres comunidades: D, E y F. Encuentren un punto que esté a la misma distancia de los tres pueblos.

Cuando tres puntos están en una misma recta se dice que son colineales.



a) Unan los puntos mediante segmentos.

b) Tracen las mediatrices de los segmentos.

c) Encuentren la intersección de las mediatrices.

Comenten:

a) Estos tres puntos están en una misma recta, ¿por qué creen que no se intersectan las mediatrices de los segmentos que los unen?

b) ¿En qué lugar creen que sería más conveniente construir un centro de salud?

III. En sus cuadernos dibujen tres puntos, los que quieran, pero que no sean colineales. Tracen una circunferencia que pase por los tres puntos que dibujaron.

Comparen los puntos que dibujaron y las circunferencias que trazaron. Comenten:

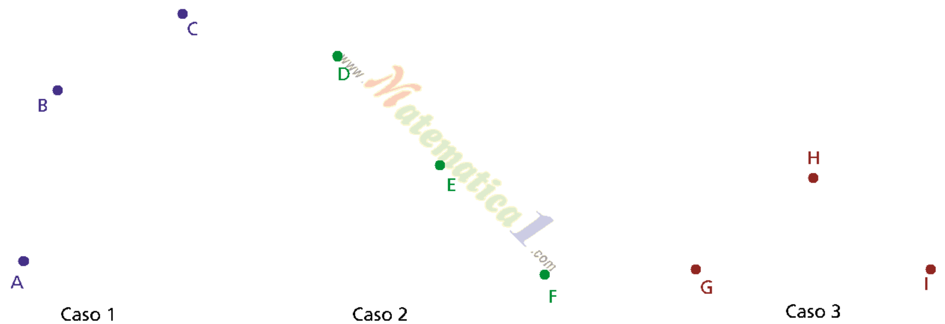
Dados tres puntos, ¿se podrá siempre trazar una circunferencia que pase por ellos?

>>> A lo que llegamos

- Dados **tres puntos que no son colineales** siempre se puede trazar una circunferencia que pase por ellos. El centro de la circunferencia que pasa por ellos es el punto de intersección de las mediatrices de $\overline{MP}$, $\overline{PS}$ y $\overline{MS}$.
- Cuando los **tres puntos son colineales** (están sobre la misma recta), no se puede trazar la circunferencia.

>>> Lo que aprendimos

1. En los siguientes casos, tracen una circunferencia que pase por los tres puntos.



2. ¿En cuáles de los tres casos pudieron trazar una circunferencia? ____________________

____

¿Por qué? ____________________________________

>>> Para saber más

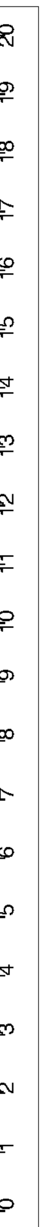
Sobre círculo y circunferencia consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

De la Peña, José Antonio. *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Hernández, Carlos. *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

El número *Pi*

En esta secuencia determinarás el número *pi* como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Justificarás y usarás la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia.

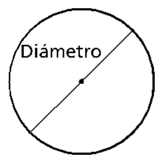


SESIÓN 1

LA RELACIÓN ENTRE CIRCUNFERENCIA Y DIÁMETRO

>>> Para empezar

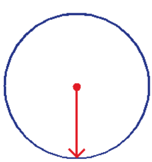
El diámetro de un círculo es una cuerda que pasa por su centro.



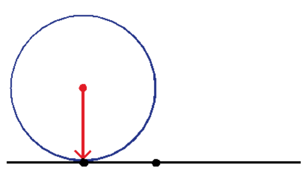
>>> Consideremos lo siguiente

I. En una hoja blanca tracen cinco círculos de distintos tamaños.

a) Recorten los círculos. En cada círculo dibujen una flecha del centro a uno de los puntos de la orilla del círculo, como se muestra en el dibujo.



b) Coloquen uno de los círculos sobre la regla graduada de esta página, haciendo coincidir la punta de la flecha con el cero de la regla.



c) Midan el perímetro del círculo rodándolo sobre la regla. Marquen cuando el círculo dé una vuelta completa.

d) Midan los perímetros de los otros cuatro círculos.

> *Recuerden que:*
> *El perímetro del **círculo** es igual a la longitud de la circunferencia.*

e) Completen la siguiente tabla:

Perímetro del círculo (cm)	Diámetro del círculo (cm)	Perímetro entre diámetro

Comenten:

De acuerdo con la tabla que llenaron, ¿cuántas veces cabe la medida del diámetro en la medida del perímetro de cada uno de los círculos que recortaron?

>>> A lo que llegamos

El número que se obtiene al dividir el perímetro de un círculo entre la longitud de su diámetro siempre es el mismo, se llama *pi* y se simboliza con la letra griega π. Una aproximación a ese número es 3.1416

Vean el video *Relación entre circunferencia y diámetro*, y al término del mismo midan cinco objetos circulares que encuentren en su salón, su diámetro y su perímetro (ya sea con un hilo o bien rodándolos sobre una regla). Verifiquen lo mostrado en el video.

II. Usando una calculadora, completen la siguiente tabla:

Diámetro del círculo (cm)	Perímetro del círculo (cm)	Perímetro entre diámetro
10		3.1416
	6.2832	3.1416
5		3.1416
	12.5664	3.1416
20		3.1416
	18.8496	3.1416

Comenten en grupo cómo completaron la tabla.

>>> Lo que aprendimos

III. En la mayoría de los triciclos, la rueda delantera es más grande que las dos traseras.

En un triciclo, el diámetro de la rueda delantera mide 30 cm y la rueda trasera mide la mitad del diámetro de la rueda delantera. Para simplificar sus cálculos, usen **3.14** como valor aproximado de π.

a) Completen la siguiente tabla:

Rueda	**Diámetro del círculo (cm)**	**Perímetro del círculo (cm)**	**Perímetro entre diámetro**
Delantera	30		3.14
Trasera			3.14

b) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que el triciclo avance 94 m? ______________________

c) ¿Cuántas vueltas completas tienen que dar las ruedas traseras para que el triciclo avance 94 m? ______________________

PERÍMETRO DEL CÍRCULO

>>> Para empezar

En esta sesión veremos cómo calcular el perímetro del círculo, o sea la longitud de la circunferencia, mediante una fórmula.

>>> Consideremos lo siguiente

a) Completen en la tabla 1 las medidas del diámetro y del perímetro de algunos círculos.

Diámetro (cm)	Perímetro (cm)
4	12.56
8	
12	37.69
3	
	314
15	
1	
50	

Tabla 1

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

b) ¿Cuánto aumenta el perímetro de un círculo cuando el diámetro aumenta al triple? ____________________

c) ¿Cuánto disminuye el diámetro de un círculo cuando el perímetro disminuye a la mitad? ____________________

d) La tabla 1 es una tabla de proporcionalidad, ¿cuál es la **constante de proporcionalidad?** ____________________

e) Encuentren una fórmula para obtener el perímetro de un círculo. ______

______

Comparen sus tablas y sus fórmulas. Comenten cómo llenaron la tabla y cómo obtuvieron sus fórmulas.

>>> Manos a la obra

I. En otra escuela, dos equipos propusieron las siguientes fórmulas para obtener el perímetro de un círculo.

- En el equipo 1 dicen que la fórmula es:

$$\frac{\textit{Perímetro}}{\textit{Diámetro}} = 3.14$$

El valor aproximado de π que utilizó el equipo 2 fue 3.14

- En el equipo 2 dicen que la fórmula es:

Perímetro = diámetro por la constante de proporcionalidad

Comenten:

a) ¿Están de acuerdo con alguna de las dos fórmulas?, ¿por qué?

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad a la que se refiere el equipo 2?

c) Los equipos 1 y 2 obtuvieron los mismos resultados en la tabla 1, ¿por qué?

d) Entre todos obtengan una fórmula para calcular el perímetro de un círculo.

>>> A lo que llegamos

El diámetro es directamente proporcional al perímetro del círculo, es decir, en la misma proporción en que aumenta o disminuye el diámetro, aumenta o disminuye el perímetro del círculo. La constante de proporcionalidad es el número π. Una aproximación de este número es 3.14

II. Utilicen la fórmula que encontraron para completar la siguiente tabla:

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

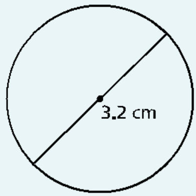
Diámetro (cm)	Perímetro (cm)
1	
2.5	
25	
50	

>>> A lo que llegamos

- El perímetro de un círculo se calcula multiplicando la medida de su diámetro por el número π.

  Por ejemplo: para calcular el perímetro de un círculo de diámetro 3.2 cm y tomando 3.1416 como valor aproximado de π, entonces

$$\text{Perímetro} = 3.2 \text{ cm} \times 3.1416 = 10.05 \text{ cm}$$



- Es decir, podemos obtener el perímetro de cualquier círculo con la fórmula:

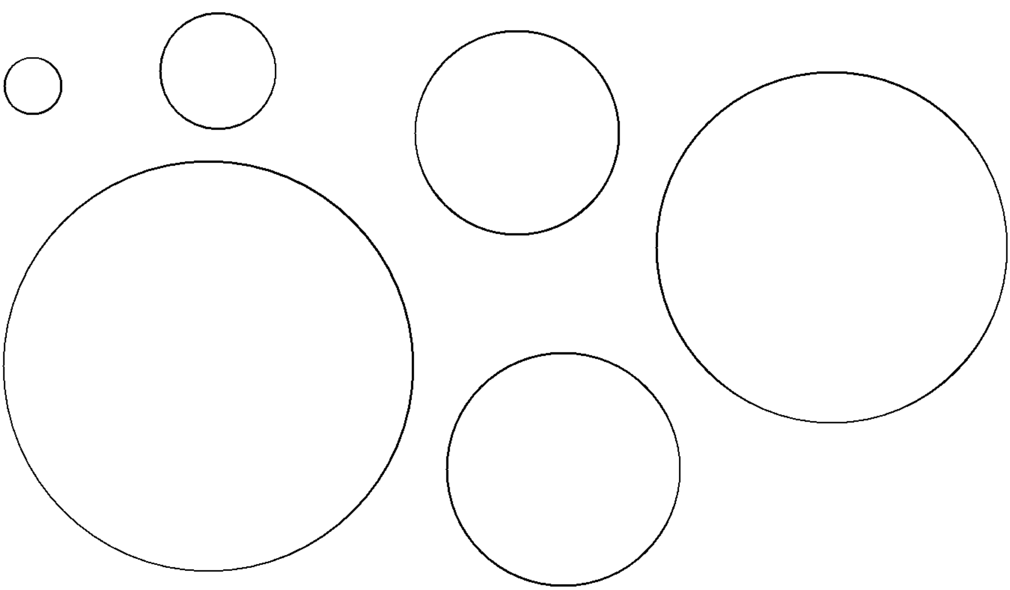
$$\text{Perímetro} = \pi \text{ por diámetro}$$

  Si se llama P al perímetro y d al diámetro, entonces puede escribirse:

$$P = \pi \times d \quad \text{o} \quad P = \pi d$$

>>> Lo que aprendimos

1. Midan la longitud de los diámetros y obtengan los perímetros de los siguientes círculos:



2. Se tienen cuatro bicicletas: una de adulto rodada 28, una de niño rodada 14, una de montaña rodada 24 y una infantil rodada 12. La rodada significa la medida en pulgadas del diámetro de las ruedas; es decir, que las ruedas de una bicicleta rodada 28 tienen un diámetro de 71.12 cm.

Recuerden que:

1 pulgada equivale aproximadamente a 2.54 cm.

a) Completen la siguiente tabla:

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

Bicicleta	Rodada	Diámetro del círculo (cm)	Perímetro del círculo (cm)	Número de vueltas en 100 m
Adulto	28″	71.12		
Niño	14″			
Montaña	24″			
Infantil	12″			

b) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de adulto avance 100 m? ______________________

c) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de niño avance 100 m? ______________________

d) ¿Cuántas vueltas completas tiene que dar la rueda delantera para que la bicicleta de montaña avance 100? ______________________ ¿Y cuántas vueltas tiene que dar la infantil? ______________________

3. En el quiosco de una plaza se va a construir un barandal para que puedan jugar los niños. El quiosco es de forma circular y su radio mide 2 m. El barandal se desea poner en distintos niveles, como se muestra en la imagen. Cada metro de barandal cuesta $150.00

a) ¿Cuánto costará el primer nivel del barandal?

b) ¿Cuántos niveles se pueden pagar con $9 500.00?

c) Al final del trabajo se pagaron $7 539.84, ¿cuántos niveles se pusieron?

d) Todos los niveles están a la misma distancia uno del otro, ¿cuánto costará poner un barandal del doble de altura que el del inciso c)?

Para simplificar los cálculos pueden utilizar 3.14 como valor aproximado de π.

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

De la Peña, José Antonio. "¿De dónde sale el famoso número π?", en *Geometría y el mundo*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Marván, Luz María. "Números de cuento y de película", en *Representación numérica*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Hernández, Carlos. "Perímetro del círculo", en *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sobre el número π consulten:

http://www.interactiva.matem.unam.mx
[Fecha de consulta 23 de agosto de 2007].
Ruta: Secundaria ⟶ Cuadratura del círculo (dar clic en el dibujo de un círculo y un cuadrado) ⟶ Avanzar tres páginas y llegar a "Definición de π"
Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

El área de los círculos

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen calcular el área y el perímetro de un círculo.

SESIÓN 1

ÁREA DEL CÍRCULO

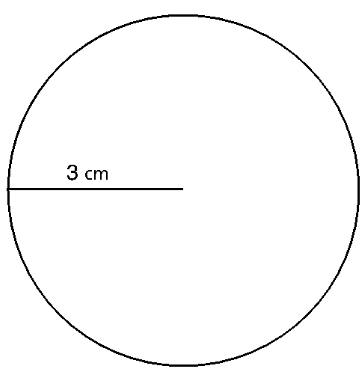
>>> Para empezar

En la secuencia 14 de *Matemáticas I*, viste que el área de un triángulo se obtiene multiplicando la base del triángulo por su altura y el resultado se divide entre 2. El área de un paralelogramo se calcula multiplicando su base por su altura.

En la vida cotidiana se encuentran diversos objetos circulares, de los cuales a menudo se necesita calcular su área, por ejemplo: la superficie de una mesa para hacerle un mantel, la superficie del asiento de una silla para tapizarla, el área de un piso para saber la cantidad de losetas necesarias para cubrirlo, entre otras cosas.

>>> Consideremos lo siguiente

En pareja, planeen una estrategia para calcular el área del siguiente círculo y llévenla a cabo. ¿Cuál es el área del círculo? ____________________

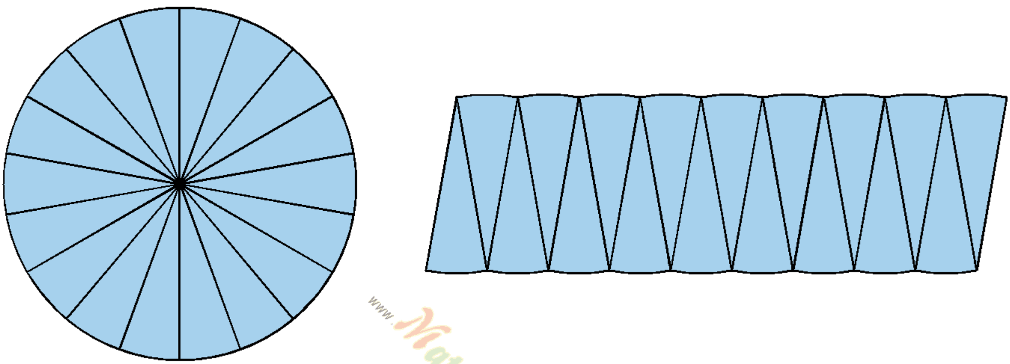


Comenten con otros equipos su procedimiento y resultado.

>>> Manos a la obra

I. En una escuela encontraron el área de las siguientes maneras:

Procedimiento 1. Un equipo recortó el círculo en 18 partes y las colocó como se muestra a continuación.



¿Observaron que la figura se parece a un paralelogramo?

Supongan que esta figura es un paralelogramo y contesten las siguientes preguntas:

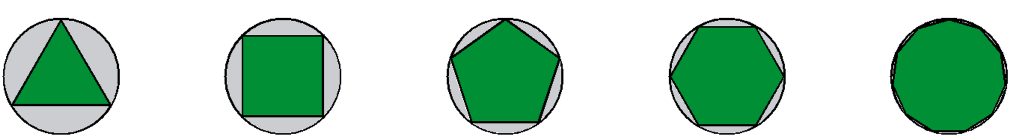
a) ¿Cuánto mide su altura? ____________________

b) ¿Cuánto mide su base? ____________________

Observen que la altura del paralelogramo es aproximadamente igual a la medida del radio del círculo y que su base es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de la circunferencia.

c) ¿Cuál es el área aproximada del paralelogramo? ____________________

Procedimiento 2. Otro equipo notó que, si hacía polígonos regulares inscritos en una circunferencia, entre más lados tuviera el polígono más se parecía al círculo.



Con ayuda del profesor, comenten con sus compañeros:

a) ¿Qué pasa con el perímetro del polígono y el perímetro de la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono regular?

____

b) ¿Qué pasa con la apotema del polígono regular y el radio de la circunferencia cuando aumenta el número de lados del polígono regular?

____

c) ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono regular?

____

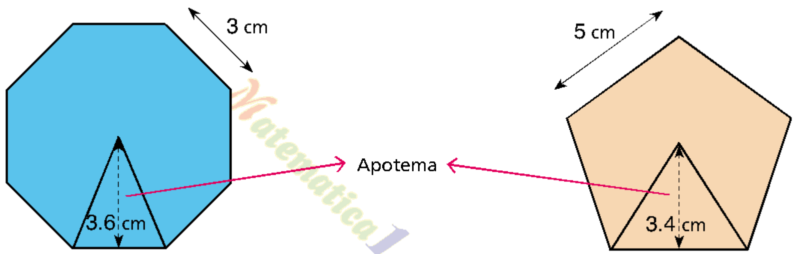
d) ¿Cuál es la fórmula para calcular el perímetro del círculo?

____

e) Calcula el área del círculo usando la discusión anterior. El área del círculo es:

____

Recuerda que: Apotema se le llama a la altura de los triángulos iguales en los que se divide un polígono regular.



>>> A lo que llegamos

Observaste que el área de un círculo puede ser aproximada con la fórmula del área de un polígono regular.

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Como el perímetro del círculo es π por diámetro y la apotema, cuando el número de lados aumenta, coincide con el radio, entonces:

$$\text{Área de un círculo} = \frac{\pi \times \text{diámetro} \times \text{radio}}{2}$$

Y como el diámetro es 2 veces el radio: área de un círculo $= \frac{\pi \times 2 \times \text{radio} \times \text{radio}}{2}$

Simplificando: Área del círculo $= \pi \times \text{radio} \times \text{radio}$

Si se llama *A* al área y *r* al radio, entonces puede escribirse: $A = \pi r^2$

Vean el video *Área del círculo* y, al término del mismo, en su cuaderno dibujen un círculo cuyo diámetro mida 15 cm y realicen el procedimiento mostrado en el video.

>>> Lo que aprendimos:

En sus cuadernos obtengan el área del vidrio que cubre las siguientes brújulas.

Recuerden que:
Un valor aproximado de π es 3.14

ÁREAS Y PERÍMETROS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

Ahora ya sabes calcular el área y el perímetro de un círculo. En esta sesión tendrás la oportunidad de aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas diversos.

>>> Consideremos lo siguiente

El vidrio para una mesa cuadrada de un metro por lado cuesta \$300. El vidrio para una mesa circular cuesta \$150.00

¿Cuál es la medida aproximada del radio de la mesa circular si los costos son proporcionales a la cantidad de vidrio, sin importar si el vidrio es rectangular o circular? ______

______

Pueden usar calculadora.

Comparen sus procedimientos y resultados con sus compañeros.

>>> Manos a la obra

I. Completen los siguientes procedimientos cuando haga falta y discutan con su pareja cuál es el correcto.

Procedimiento 1.

Como \$150 es la mitad de \$300, entonces la mesa circular tiene por radio la mitad de 1 m, es decir, $\frac{1}{2}$m.

- *¿Cuál es el área de la mesa cuadrada?* ______
- *¿Cuál es el área de una mesa circular cuyo radio mide $\frac{1}{2}$m?* ______
- *Compara las áreas de ambas mesas.*
- *¿Consideras correcto este resultado?* ______
- *¿Por qué?* ______

Procedimiento 2.

Calculamos en centímetros cuadrados el área de la mesa cuadrada, esto es:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ cm x } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ cm} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ cm}^2$$

Como el vidrio para la mesa redonda costó la mitad, entonces el área de la mesa redonda es la mitad del área de la mesa cuadrada, es decir:

$$\text{Área de la mesa circular} = \frac{\text{Área mesa cuadrada}}{2} = \_\_\_\_\_\_ \text{ cm}^2$$

Como el área de un círculo se calcula con la fórmula:

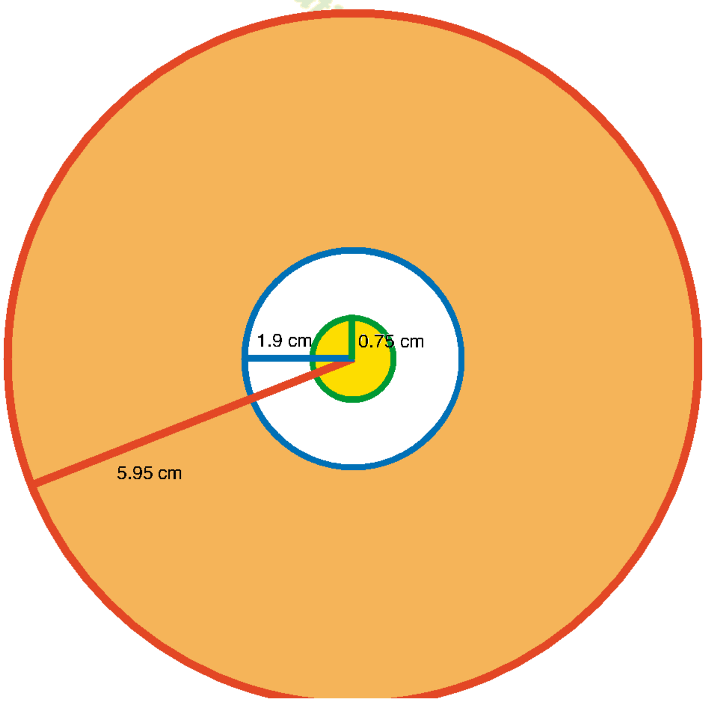
____

buscamos, con ayuda de la calculadora, un número que multiplicado por sí mismo y después por 3.14 *nos dé el área de la mesa circular. Ese número es:* ____________

- *¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, de una mesa circular cuyo radio tiene esta última medida?* ______________________________
- *Compara las áreas de ambas mesas.*
- *¿Consideras correcto este resultado?* ______________________
- *¿Por qué?* ______________________________

Comparen y comenten sus respuestas con sus compañeros de grupo.

II. La siguiente figura es un disco compacto. Las áreas anaranjada y blanca se llaman coronas circulares.



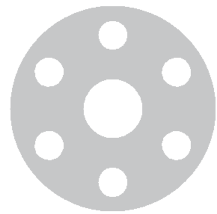
a) El área de la corona circular anaranjada, que es la parte del disco compacto donde se graba la información, mide: ______________________

b) El área de la corona circular blanca, que es la protección del disco compacto, mide: ______________________

c) En su cuaderno escriban cómo obtuvieron el área de ambas coronas circulares.

Comparen en grupo los procedimientos de cada equipo y escriban en sus cuadernos un procedimiento general para obtener el área de una corona circular.

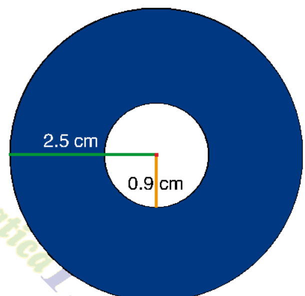
>>> Lo que aprendimos



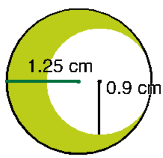
1. ¿Cuánto medirá, aproximadamente, el radio de una ventana circular si el área del vidrio mide 2 827.44 cm²? ______________________

2. ¿Cuánto medirá el diámetro de un carrete, como el de la ilustración, si su perímetro es igual a 11 cm? ______________________

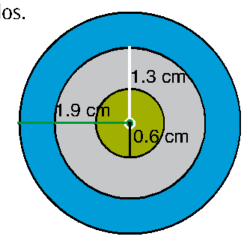
3. Obtengan el área de la corona circular azul.



4. Calculen el área de la parte sombreada de color verde. El punto verde es el centro del círculo verde y el punto negro es el centro del círculo blanco.



5. Calcula el área de la parte sombreada en color gris de la siguiente figura. El punto negro es el centro de los círculos.



>>> Para saber más

Sobre el área del círculo consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula: Hernández, Carlos. *La geometría en el deporte*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2002.

Sobre el área del círculo consulta: **http://www.interactiva.matem.unam.mx** [Fecha de consulta 23 de agosto de 2007]. RUTA: Secundaria ⟶ Cuadratura del círculo ⟶ dar clic en el dibujo de un círculo y un cuadrado.

Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, UNAM.

Relaciones de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a formular la expresión algebraica que corresponde a la relación entre dos cantidades que son directamente proporcionales. También aprenderás a asociar los significados de las variables en la expresión $y = kx$, con las cantidades que intervienen en dicha relación.

SESIÓN 1

CAMBIO DE MONEDA

>>> Para empezar

Historia de la moneda

Los orígenes de la moneda como forma de pago se remontan al siglo VII antes de Cristo, en la antigua Grecia. La moneda surge como una necesidad de superar las formas de intercambio como el trueque. Para ello, había que darle cierto valor a algo tan pequeño como un simple trozo de metal. La solución fue fabricar la moneda con metales preciosos como el oro y la plata.

Las monedas registran acontecimientos que ocurrieron hace miles de años y hechos que sólo se conocen a través de ellas.

Existen algunos emperadores romanos de los que se conoció su existencia por aparecer en las monedas que ellos mismos mandaron acuñar.

En la secuencia 21 de su libro de *Matemáticas I, volumen II* resolviste problemas de conversiones o de tipo de cambio del dólar respecto del peso: un dólar equivale a \$11.70.[1] El tipo de cambio entre la moneda de un país y la de otro es la cantidad de dinero que se recibe por la unidad en el otro tipo de moneda. En la actualidad hay negocios que se dedican a cambiar monedas de un país por monedas de otro. Estos negocios se llaman **casas de cambio**.

En esta sesión aprenderás a realizar conversiones entre la moneda de México y las monedas de distintos países.

[1] Tipo de cambio vigente al 24 de noviembre de 2005.

>>> Consideremos lo siguiente

La tabla 1 muestra algunas conversiones que se hicieron en una casa de cambio con monedas de distintos países respecto del peso mexicano.

País	Nombre de la moneda	Cantidad en la moneda correspondiente	Cantidad recibida en pesos mexicanos
Estados Unidos de América	Dólar estadounidense	10	117
España	Peseta española	100	7.48
Inglaterra	Libra esterlina	200	3 666
Japón	Yen japonés	200	17.8
Guatemala	Quetzal guatemalteco	150	210

Tabla 1

Vicente fue de viaje a los Estados Unidos de América y a Guatemala. A su regreso, cambió las monedas que le sobraron: 13 dólares estadounidenses y 8 quetzales guatemaltecos.

Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Qué cantidad en pesos recibió Vicente por los 8 quetzales guatemaltecos?

____

b) ¿Qué cantidad en pesos recibió Vicente por los 13 dólares estadounidenses?

____

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar la cantidad en pesos que equivale a 8 quetzales guatemaltecos.

Cantidad de quetzales guatemaltecos	Cantidad recibida en pesos mexicanos
150	210
50	
5	
1	
8	

Tabla 2

Los quetzales guatemaltecos y los pesos son cantidades directamente proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que permite multiplicar cualquier cantidad de quetzales guatemaltecos y encontrar su equivalente en pesos? ______________________

____

II. Un equipo de otra escuela hizo la siguiente observación:

Si llamamos ***x*** a la cantidad de quetzales guatemaltecos que se van a cambiar y llamamos ***y*** a la cantidad de pesos que se obtienen por el cambio, la siguiente expresión algebraica permite obtener la cantidad ***y*** de pesos:

$$y = 1.4x$$

Comenten:

a) ¿Están de acuerdo con la expresión algebraica que encontraron en el otro grupo?

b) Con esta expresión encuentren cuántos pesos obtienen si cambian 8 quetzales. ¿Obtuvieron el mismo resultado que al llenar la tabla?

III. Llamen ***x*** a la cantidad de dólares que se van a cambiar y llamen ***y*** a la cantidad de pesos que se obtiene por el cambio. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas permiten obtener ***y*** a partir de ***x***?

- $y = x$
- $11.70x = y$
- $11.70y = x$
- $x = y$
- $y = 11.70x$
- $x = 11.70y$

Comparen las expresiones que escogieron.

IV. Completen la siguiente tabla para encontrar las expresiones algebraicas que corresponden a las distintas situaciones de proporcionalidad de la tabla 1.

Relación proporcionalidad	Expresión algebraica
Cambio de dólar estadounidense (x) a pesos (y)	$y = 11.70x$
Cambio de quetzales guatemaltecos (x) a pesos (y)	$y = 1.4x$
Cambio de libra esterlina (x) a pesos (y)	
Cambio de peseta española (x) a pesos (y)	
Cambio de yen japonés (x) a pesos (y)	

Tabla 3

>>> A lo que llegamos

A las relaciones de proporcionalidad directa les corresponden expresiones algebraicas que permiten encontrar las cantidades multiplicando su correspondiente por la constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, si la cantidad de dólares estadounidenses que se van a cambiar se representa como x, y la cantidad de pesos que se obtienen se representa como y, entonces la expresión algebraica

$$y = 11.70x$$

permite saber la cantidad de pesos (y) que se obtienes al cambiar cierta cantidad de dólares (x). La constante de proporcionalidad en este caso es: **11.70 pesos por cada dólar**.

Esta expresión es llamada la **expresión algebraica que corresponde a la relación de proporcionalidad directa**.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa la siguiente tabla para encontrar las cantidades de pesos que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares canadienses.

Cantidad de dólares canadienses	Cantidad recibida en pesos mexicanos
20	178
10	
1	

a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite calcular la cantidad de pesos obtenidos al cambiar dólares canadienses? ______________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica para calcular la cantidad de pesos obtenidos al cambiar dólares canadienses? ______________

SESIÓN 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD EN DISTINTOS CONTEXTOS

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás estudiando las expresiones algebraicas correspondientes a las situaciones de proporcionalidad.

En la secuencia 16 de tu libro de *Matemáticas I, volumen I* estudiaste la aplicación sucesiva de constantes de proporcionalidad en el cálculo de amplificaciones de imágenes con los microscopios ópticos compuestos.

>>> Consideremos lo siguiente

En el laboratorio de Ciencias hay algunos microscopios compuestos. Uno de ellos tiene una lente en el **objetivo** que aumenta 15 veces el tamaño de los objetos. Además, tiene una lente en el **ocular** que aumenta 10 veces.

Llenen la siguiente tabla para encontrar el tamaño con el que se verán las imágenes usando este microscopio.

	Tamaño real (micras)	**Tamaño obtenido con la primera lente (micras)**	**Tamaño final (micras)**
Bacteria 1	3	45	
Espermatozoide humano	8		
Cloroplasto	11		
Glóbulo rojo	12		
Glóbulo blanco	200		

Tabla 1

En esta tabla hay varias relaciones de proporcionalidad. En sus cuadernos escriban la expresión algebraica que permite:

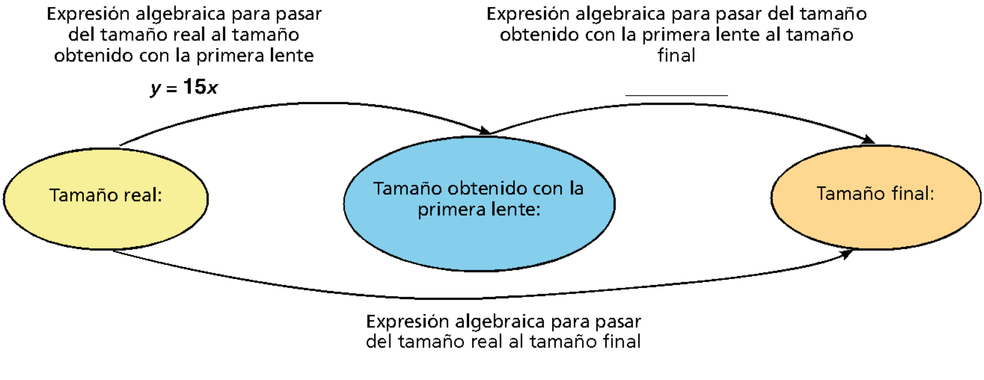
a) Pasar del tamaño real del objeto al tamaño final.

b) Pasar del tamaño real al tamaño obtenido con la primera lente.

c) Pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente.

>>> Manos a la obra

I. En el siguiente diagrama se llama x al tamaño real, y al tamaño obtenido con la primera lente y w al tamaño final visto en el microscopio. Complétenlo:



Comparen las fórmulas que obtuvieron en el diagrama y comenten cómo las obtuvieron.

>>> A lo que llegamos

Cuando se **aplican sucesivamente dos constantes de proporcionalidad** se obtienen varias relaciones de proporcionalidad. Para cada una de estas relaciones se puede encontrar una expresión algebraica.

Por ejemplo, en un microscopio con lentes de 20 y 30 veces de aumento, si se llama x al tamaño real, y al tamaño obtenido con la primera lente y w al tamaño final, se pueden obtener:

- La expresión que permite pasar del tamaño real al tamaño obtenido con la primera lente: $y = 20x$
- La expresión que permite pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente: $w = 30y$
- La expresión que permite pasar directamente del tamaño real al tamaño final:

$$w = 600x$$

La constante de proporcionalidad de la última expresión se obtiene al multiplicar las constantes dadas por los aumentos de las lentes.

II. En la secuencia 15 de su libro de **Matemáticas I** aprendieron que el rendimiento de un automóvil es el número de km recorridos por cada litro de gasolina.

Si el rendimiento de un automóvil es de 18 km por litro de gasolina,

a) ¿Cuántos km recorrerá ese automóvil con 2 ℓ de gasolina? ______________________

____

b) ¿Y con 5 litros de gasolina? ______________________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la distancia recorrida para cualquier cantidad de litros de gasolina? ______________________

Completen la siguiente tabla para saber cuántos litros de gasolina consume el automóvil en las distintas rutas indicadas en la tabla.

Ruta	Distancia recorrida (km)	Consumo de gasolina (ℓ)
 Morelia – Guanajuato	162	
 Ciudad Victoria – Monterrey	288	
 Ciudad de México – Guadalajara	576	
 Aguascalientes – Campeche	1 818	

Tabla 2

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que permite encontrar el consumo de gasolina a partir de la distancia que se recorre? ______________________

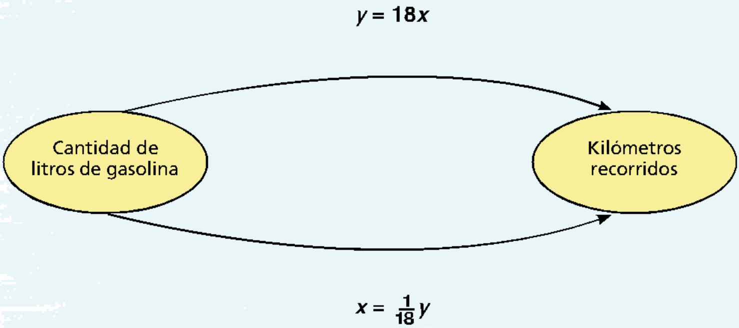
e) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación de proporcionalidad? ______________________

>>> A lo que llegamos

En la relación de proporcionalidad del rendimiento de gasolina encontraron dos expresiones algebraicas:

- **La que permite calcular los kilómetros que se pueden recorrer con cierta cantidad de litros de gasolina.**
- **La que permite calcular la cantidad de gasolina necesaria para recorrer cierta cantidad de kilómetros.**

El siguiente diagrama muestra la relación que existe entre estas dos expresiones:



Recuerden que:
Un número y su recíproco multiplicados dan 1. Por ejemplo:
$6 \times \frac{1}{6} = 1$

En este caso, las constantes de proporcionalidad son números recíprocos, es decir, la constante de proporcionalidad de la segunda expresión es el recíproco de la constante de proporcionalidad de la primera.

>>> Lo que aprendimos

Un microscopio tiene una lente en el objetivo que aumenta 30 veces el tamaño de los objetos y una lente en el ocular que aumenta 20 veces.

1. Encuentra:
   a) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño real de un objeto a su tamaño final. ________________
   b) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño real a su tamaño obtenido con la primera lente. ________________
   c) La expresión algebraica que permite pasar del tamaño obtenido con la primera lente al tamaño obtenido con la segunda lente. ________________

2. Hay una célula que con este microscopio se ve de 3 milímetros de tamaño, ¿cuánto mide realmente? ________________
   Encuentra la expresión algebraica que permite encontrar el tamaño real de un objeto si se sabe el tamaño final con el que se ve. ________________

>>> Para saber más

Sobre el tipo de cambio entre monedas de distintos países consulta:
http://www.oanda.com/convert/classic?user=etravetware&lang=es
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Gráficas asociadas a situaciones de proporcionalidad

En esta secuencia aprenderás a explicar las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

SESIÓN 1

GRÁFICAS Y SUS CARACTERÍSTICAS

>>> Para empezar

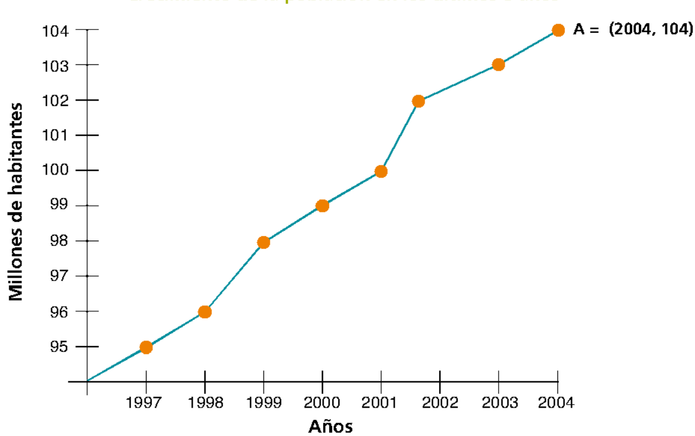
Gráficas

Mediante el uso de las gráficas se pueden interpretar y explicar situaciones diversas, por ejemplo:

- El crecimiento de la población en determinada región del país en un tiempo dado.
- La variación del peso de un bebé a lo largo de cierto tiempo.
- El índice de natalidad en un país a través del tiempo.

En la secuencia 7 **¿Cómo es y dónde está la población?** de su libro de *Geografía de México y del mundo, volumen I* estudiaron la distribución de la población en México. La siguiente es una gráfica que muestra el crecimiento de la población de nuestro país en los últimos 8 años.

Crecimiento de la población en los últimos 8 años



Para localizar e interpretar los puntos de una gráfica se hace uso de sus coordenadas. Las coordenadas del punto **A** son (2004,104), esto quiere decir que en el año 2004 había 104 millones de habitantes. En la primera coordenada del punto, llamada **abscisa**, van los años, y en la segunda coordenada del punto, llamada **ordenada**, el número de habitantes que hubo en ese año. El punto **A** tiene como abscisa a 2004 y como ordenada a 104.

De acuerdo con la información de la gráfica, respondan lo siguiente:

a) ¿En qué año había 102 millones de habitantes? ____________________

b) ¿En qué año había 95 millones de habitantes? ____________________

c) Localicen el punto que tiene ordenada 96. ¿Cuál es su abscisa? ____________

¿A qué año corresponde este punto? ____________________ ¿Cuántos millones de habitantes hubo en ese año? ____________________

d) Completen la siguiente tabla para establecer el número de habitantes que hubo en los años que se indican.

Año	Número de habitantes (en millones)
1997	
1998	
1999	
2000	
2001	
2002	
2003	
2004	104

Comenten:

¿Cómo se vería la gráfica si de un año a otro la población no hubiera crecido?

>>> Consideremos lo siguiente

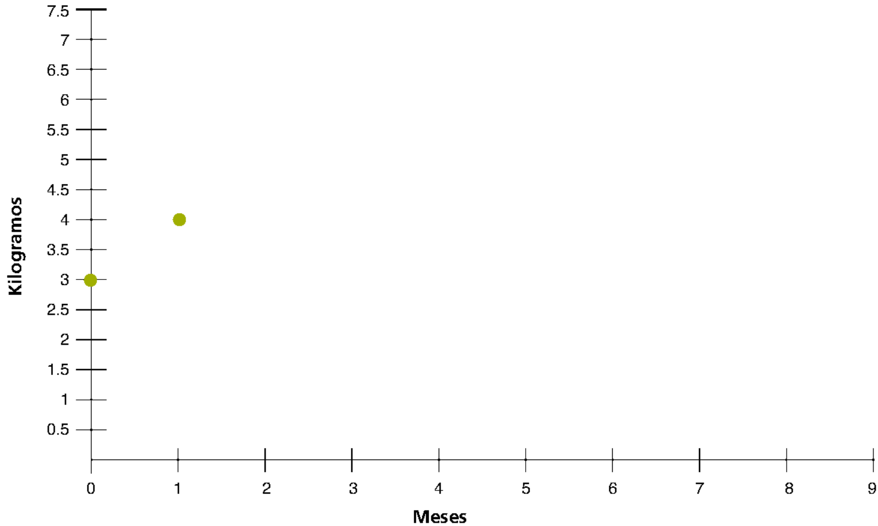
A continuación van a construir las gráficas de dos situaciones que han estudiado en este libro.

- En la secuencia 27 de su libro de *Matemáticas I, Volumen II* analizaron que el peso de un bebé durante el primer año de vida aumenta aproximadamente 0.5 kg por mes. Elaboraron una tabla en la que se muestra cómo va cambiando el peso de un bebé mes con mes, hasta cumplido un año de edad, considerando que el bebé al nacer pesó 3 kg.

  a) En sus cuadernos copien la tabla que completaron en la secuencia 27.

  b) Con los datos de la tabla terminen la siguiente gráfica:

Crecimiento del bebé durante sus primeros 6 meses



c) ¿En qué mes el bebé pesó 7.2 kg? ________________________

d) ¿En qué mes el bebé pesó 3.6 kg? ________________________

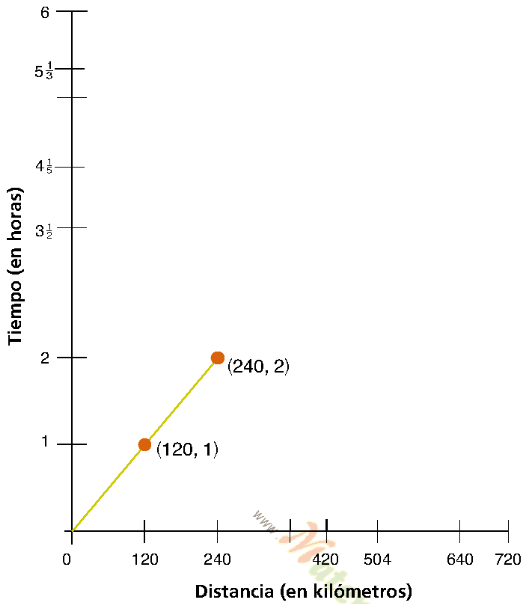
- Las compañías fabricantes de automóviles hacen pruebas de velocidad a sus autos para verificar sus motores, frenos y sistemas de suspensión. Entre otras cosas, deben verificar que las velocidades a las que pueden viajar se mantengan constantes durante recorridos largos.

  En la secuencia 6 de su libro de *Matemáticas I, volumen I* hicieron una tabla de la velocidad promedio de un automóvil. Supongan que, viajando en carretera, un automóvil va a 120 km por hora en promedio.

  a) Completen la siguiente tabla para encontrar las distancias recorridas.

Tiempo de viaje (en horas)	Kilómetros recorridos
1	
2	
$3\frac{1}{2}$	
$4\frac{1}{5}$	
$5\frac{1}{3}$	
6	

b) Con los datos de la tabla anterior, completen la siguiente gráfica.



c) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer el automóvil 20 km? ______________________

d) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer el automóvil 40 km? ______________________

Respondan:

¿Cuál de las dos gráficas que acaban de construir, la del peso del bebé y la de la velocidad promedio del automóvil, corresponde a una situación de proporcionalidad? __________

____

Comparen sus respuestas y sus gráficas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesó el bebé a los dos meses de nacido? ______________________

b) ¿Cuánto pesó a los cuatro meses? ______________________

c) A los 6 meses el bebé pesó 6 km. ¿Cuánto pesó a los 12 meses? ______________

II. Completen la siguiente tabla para encontrar el número de kilómetros recorridos en las distintas fracciones de tiempo que se indican:

Tiempo de viaje (hs)	Kilómetros recorridos
1	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$	

Comenten:

a) ¿En qué fracción de tiempo se recorren 20 km?, ¿a cuántos minutos es equivalente esta fracción de tiempo?

b) ¿Hay un tiempo para el cual el automóvil recorre 0 km?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorren en cero minutos?

>>> A lo que llegamos

- Las gráficas son de mucha utilidad para representar diversas situaciones que se quieran estudiar. Por ejemplo, la gráfica de la velocidad constante del automóvil es una **gráfica de proporcionalidad directa**, porque la distancia recorrida por el automóvil y el tiempo que tarda en recorrerla son cantidades directamente proporcionales.
- En las situaciones de proporcionalidad el punto **(0,0)** es parte de la gráfica (en 0 horas se recorren 0 km). Esto siempre sucede en las gráficas que representan relaciones de proporcionalidad.

>>> Lo que aprendimos

1. En la secuencia 31 de su libro de *Matemáticas I* encontraron que la expresión algebraica.

$$y = 11.70x$$

Permite encontrar la cantidad de pesos (y) que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares (x).

En su cuaderno hagan la gráfica que corresponde a esta situación de proporcionalidad y contesten:

a) Si $x = 0$, ¿cuánto vale la y? ______

b) Si $x = 10$, ¿cuánto vale y? ______

c) Si $x = 30$, ¿cuánto vale y? ______

COMPARACIÓN DE GRÁFICAS

SESIÓN 2

>>> Para empezar

En la secuencia 6 del libro de *Matemáticas I, volumen I* estudiaste las propiedades de las cantidades directamente proporcionales y aprendiste que la cantidad de pintura es proporcional a su precio.

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la tabla 1 para determinar los costos de varias cantidades de pintura azul y, en su cuaderno, hagan una gráfica correspondiente.

Cantidad de pintura azul (ml)	Costo de la pintura ($)
500	50
100	
800	
200	
0	
400	
1 000	

Tabla 1

a) ¿Qué cantidad de pintura se compra con $5? ______

b) ¿Qué cantidad de pintura se compra con $3? ______

>>> Manos a la obra

I. En un equipo de otra escuela hicieron lo siguiente para construir la gráfica asociada a la tabla 1.

Primero determinaron dos puntos a graficar.

A = (500 ml, $50)

B = (100 ml, $10)

Luego localizaron los puntos **A** y **B** en el plano cartesiano. Finalmente, dijeron que como la gráfica era de proporcionalidad, entonces bastaba unir el punto **A** con el punto **B** y prolongar la recta que une a estos puntos y así obtener la gráfica asociada a la tabla 1.

En el siguiente espacio hagan el procedimiento que hizo el equipo de la otra escuela.

Comenten:

¿Están de acuerdo con el procedimiento que hicieron en la otra escuela? ¿Por qué?

Con los datos de la tabla 1 completen los siguientes datos para determinar algunos puntos más que pertenecen a la gráfica.

A = (500 ml, $50)	**B** = (100 ml, $10)	**C** = (800 ml, $ _______)	**D** = (200 ml, $ _______)
E = (0 ml, $ _______)	**F** = (400 ml, $ _______)	**G** = (1000 ml, $ _______)	

Tabla 2

En la gráfica que completaron anteriormente localicen y dibujen los puntos de la tabla 2.

¿Cuáles de los puntos que dibujaron pertenecen a la gráfica? ______________________

____

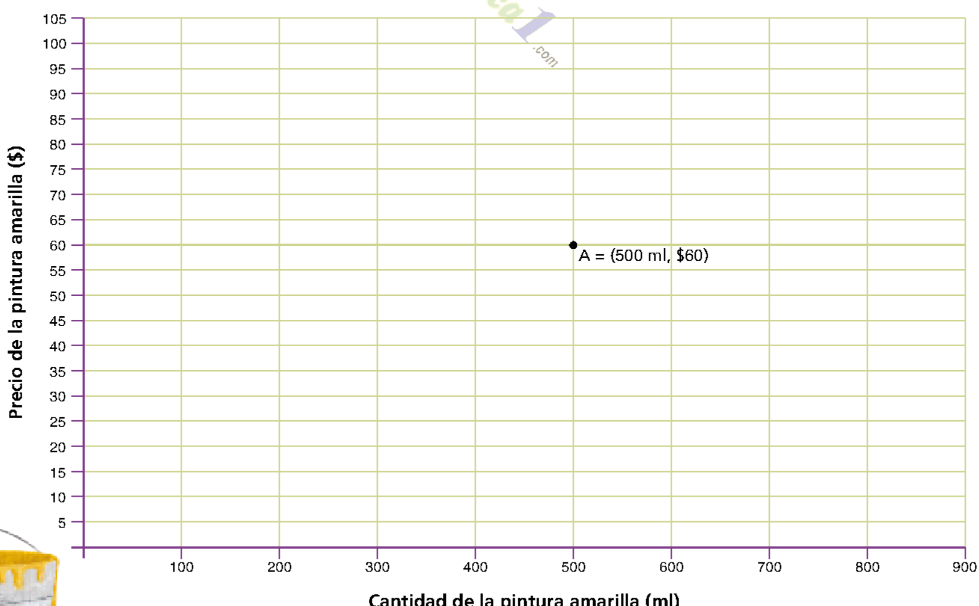
II. Completen las siguientes tablas, en las que vienen los precios de algunas cantidades de pintura amarilla y pintura verde.

Cantidad de pintura amarilla (ml)	Costo de la pintura ($)
500	60
100	
800	
200	
0	
400	

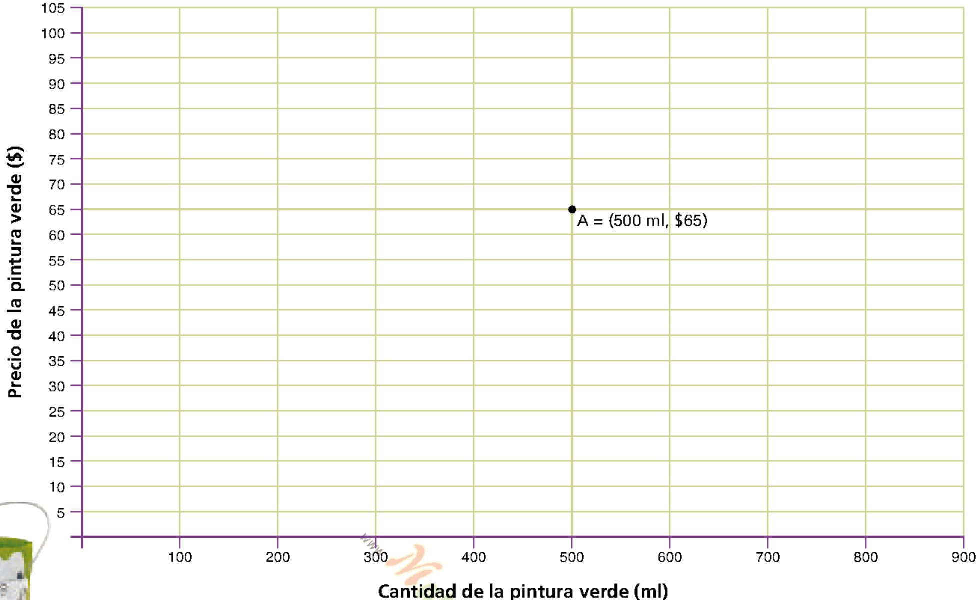
Cantidad de pintura verde (ml)	Costo de la pintura ($)
500	65
100	
800	
200	
0	
400	

Tabla 3 y 4

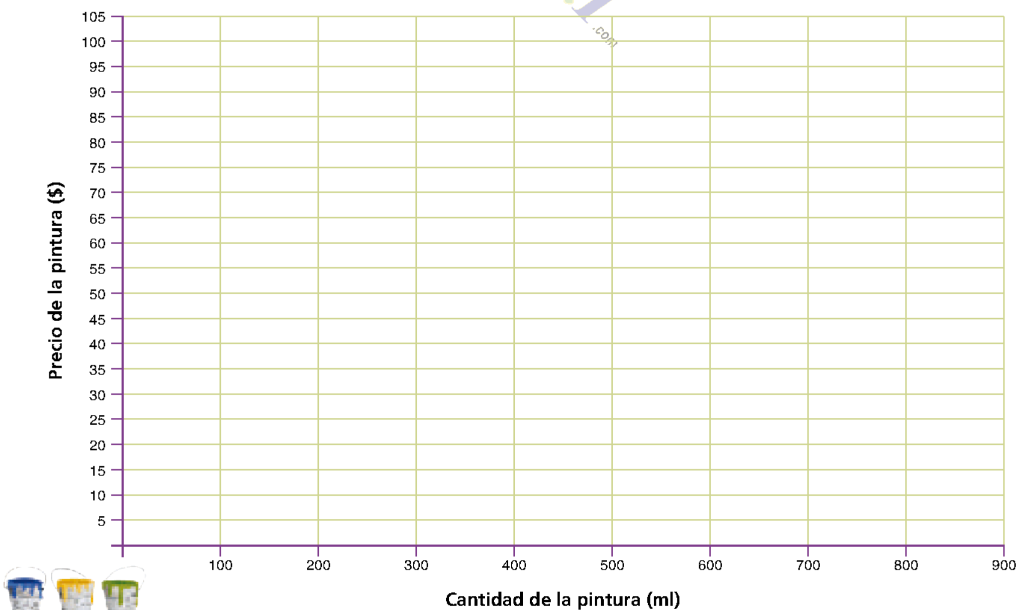
En el siguiente espacio hagan la gráfica asociada a las cantidades de pintura amarilla y su precio.



En el siguiente espacio hagan la gráfica asociada a las cantidades de pintura verde y su precio.



III. En el siguiente espacio dibujen las gráficas correspondientes a la tabla 1, la tabla 3 y la tabla 4 (usen el color azul para la 1, el amarillo para la 3 y el verde claro para la 4).



IV. Comenten lo siguiente:

a) El litro de pintura verde cuesta más que el litro de pintura azul. ¿Cómo se refleja esto en la gráfica que completaron anteriormente?

b) El costo del litro de pintura verde es mayor que el costo de pintura amarilla. ¿Cómo se refleja esto en la gráfica que completaron anteriormente?

>>> A lo que llegamos

Una situación en la que estén involucradas cantidades directamente proporcionales (por ejemplo, la cantidad de pintura azul y su costo) tiene asociada una gráfica con dos características particulares:

- **Son puntos que están sobre una línea recta.**
- **Pasan por el origen, es decir, por el punto (0,0).**

De la comparación de gráficas puede obtenerse información sobre la relación de proporcionalidad. Por ejemplo, la gráfica de la pintura azul se encuentra entre la de la pintura verde claro y el eje horizontal. La interpretación de este hecho es que la pintura verde claro es más cara que la pintura azul, pues 500 ml de pintura verde claro cuestan $65, mientras que 500 ml de pintura azul cuestan $50.

>>> Lo que aprendimos

En la secuencia 31 de su libro de *Matemáticas I* encontraron que la expresión algebraica

$$y = 8.9x$$

permite encontrar la cantidad de pesos (y) que se obtienen al cambiar distintas cantidades de dólares canadienses (x).

1. En sus cuadernos grafiquen esta situación de proporcionalidad y contesta:

a) Si $y = 0$, ¿cuánto vale x?

b) ¿Cuáles puntos de la gráfica están sobre una línea recta?

2. Comparen la gráfica anterior con la gráfica correspondiente a la expresión $y = 11.70\,x$, que permite encontrar la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar dólares americanos.

a) ¿Cuál de las dos gráficas queda entre el eje horizontal y la otra gráfica? ¿Cómo interpretan esto?

Comparen sus respuestas.

>>> Para saber más

Sobre el crecimiento de la población en el país consulten:
http://www.cideiber.com/infopaises/Mexico/Mexico-02-01.html
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Cuentas de números con signo

En esta secuencia utilizarás procedimientos informales y algorítmicos de adición y sustracción de números con signo en diversas situaciones.

SESIÓN 1

LOS ÁTOMOS

>>> Para empezar

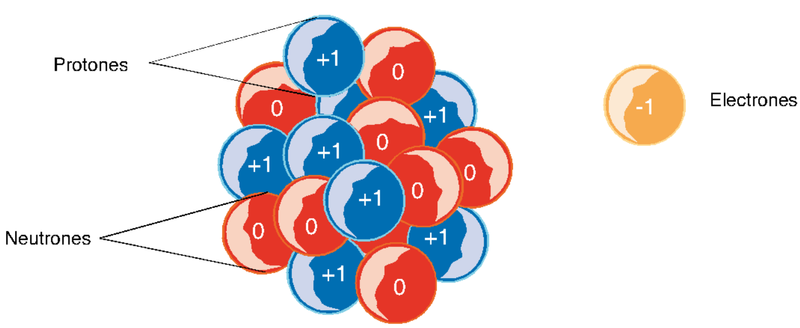
Los átomos

Una de las inquietudes más antiguas del hombre ha sido la de conocer de qué tipo de sustancias están hechas las cosas. Si bien se necesitaron muchos años de estudio para responder esta pregunta, ahora se sabe que toda sustancia está hecha de materia, que a su vez está formada por átomos. Asimismo, los átomos están compuestos por varios tipos de partículas, entre las que destacan las siguientes tres:

Los **neutrones**. No tienen carga eléctrica o su carga es nula, y forman parte del núcleo del átomo. La carga de un neutrón es **0**.

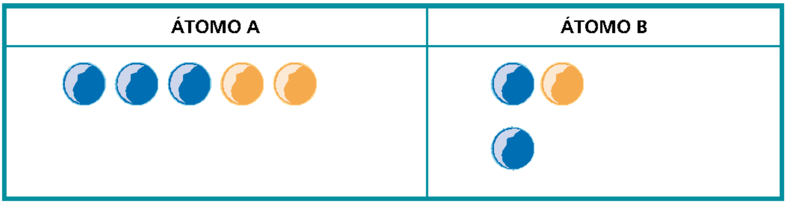
Los **protones**. Tienen carga eléctrica positiva y, junto con los neutrones, constituyen el núcleo del átomo. La carga de un protón es **+1**.

Los **electrones**. Tienen carga eléctrica negativa y giran alrededor del núcleo del átomo. La carga de un electrón es **–1**.



La **carga total** de un átomo depende del número de protones (cargas positivas) y de electrones (cargas negativas) que lo componen. Al juntar un protón y un electrón se obtiene una carga **0**, ya que la carga positiva del protón se cancela con la carga negativa del electrón. Así, la carga total de un átomo es el número de protones o electrones que resultan después de haber hecho todas las cancelaciones posibles.

Por ejemplo, los átomos A y B de la siguiente figura son distintos, pero ambos tienen carga total +**1**:



 Protones

 Electrones

>>> Consideremos lo siguiente

Completen la siguiente tabla para calcular la carga total de distintos átomos:

Átomo	Partículas	Carga total
A		+2
B		
C		
D		
I		
E		
F		
G		
H		

Comparen sus tablas y comenten:

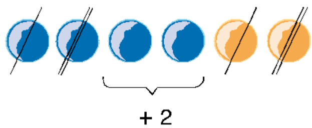
Aparte de los átomos con carga **+2** que aparecen en la tabla, ¿habrá otros átomos que tengan carga **+2**? Dibújenlos.

>>> Manos a la obra

I. En un equipo de otra escuela dijeron que los átomos **A**, **B**, **I** y **H** tienen carga total **+2**.

Explicaron lo siguiente:

La carga total del átomo **A** se puede obtener cancelando los pares protón-electrón que tiene:



Cancelen los pares protón-electrón en los átomos **B**, **I** y **H** y verifiquen si tienen carga total **+2**.

Comenten: ¿Tienen carga total **+2** los átomos **A**, **B**, **I** y **H**?

a) En la tabla hay dos átomos con carga total **–1**, ¿cuáles son? ________ y ________

Verifiquen las cargas cancelando pares protón-electrón.

b) En la tabla, ¿cuáles átomos tienen carga **0**? ____________________

II. El átomo **F** tiene carga total **–3**. Dibujen dos átomos más con carga **–3**.

Comparen sus átomos y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos, pero con carga **–3**, encontraron en el grupo?, ¿cuántos protones y cuántos electrones tienen?

b) En todos los átomos que encontraron hay más cargas negativas que positivas; ¿cuántas cargas negativas más hay que cargas positivas en cada átomo?

>>> A lo que llegamos

Un átomo tiene:

- **Carga positiva, si tiene más protones que electrones.**
- **Carga negativa, si tiene más electrones que protones.**

La carga total de un átomo es independiente del número de cargas 0 (neutrones) que tenga, ya que no aportan a la carga total.

III. Completen con los protones o electrones necesarios para que los siguientes átomos tengan carga total **0**.

ÁTOMO A	ÁTOMO B
	

a) ¿Cuántos protones tiene el átomo A? ______________ ¿Y cuántos electrones debe tener para que tenga carga total **0**? ______________

b) ¿Cuántos electrones tiene el átomo B? ______________ ¿Y cuántos protones debe tener para que tenga carga total **0**? ______________

c) Si un átomo tiene carga total **0** y se sabe que tiene **25** protones, ¿cuántos electrones tiene? ______________

>>> A lo que llegamos

Un átomo tiene carga 0 si tiene el mismo número de protones que de electrones, ya que la carga positiva de cada protón se anula con la carga negativa de cada electrón.

IV. El *valor absoluto* de la *carga de un átomo* es el número total de cargas que tiene, es decir, es el número de protones o electrones que quedan después de cancelar las parejas protón-electrón.

a) Encuentren el valor absoluto de las cargas de los siguientes átomos:

Partículas del átomo	Carga total	Valor absoluto de la carga total
		
		
		
		
		

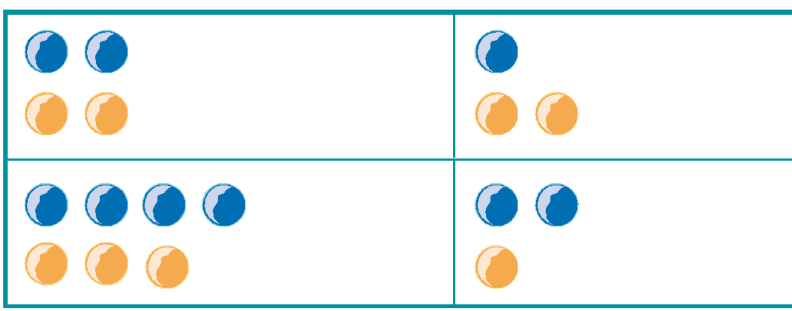
b) Dibujen en cada uno de los rectángulos un átomo que tenga el valor absoluto de la carga que se indica.

Partículas del átomo	Valor absoluto de la carga total
	4
	7
	0

Comparen sus átomos.

>>> Lo que aprendimos

1. Completa con los protones o electrones necesarios para que la carga de los átomos siguientes sea **+3**.



En todos los átomos que encontraste hay más cargas positivas que negativas, ¿cuántas cargas positivas más hay? ____________________

2. Encuentra cuatro átomos distintos en los que la carga sea -2.

a) En todos los átomos que encontraste hay más cargas negativas que positivas, ¿cuántas cargas negativas más hay? ______________________

b) ¿Cuál es el valor absoluto de la carga de estos átomos? ______________

SUMAS DE NÚMEROS CON SIGNO

SESIÓN 2

>>> Para empezar

El proceso mediante el cual se agregan o se quitan cargas de un átomo se llama **ionización**. En esta sesión agregarás protones y electrones a algunos átomos y aprenderás a encontrar la carga final mediante la suma de números con signo.

>>> Consideremos lo siguiente

a) ¿Cuál es la carga final de un átomo que tiene originalmente carga total **+3** y se le agregan **2** electrones? ______________________

Pueden usar círculos azules y anaranjados para representar las partículas del átomo.

b) Esta ionización se puede representar mediante una suma de números con signo:

Se agregan partículas

$$\underbrace{(+3)}_{\text{Carga original del átomo}} \quad + \quad \underbrace{(-2)}_{\text{Carga de los 2 electrones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta suma?

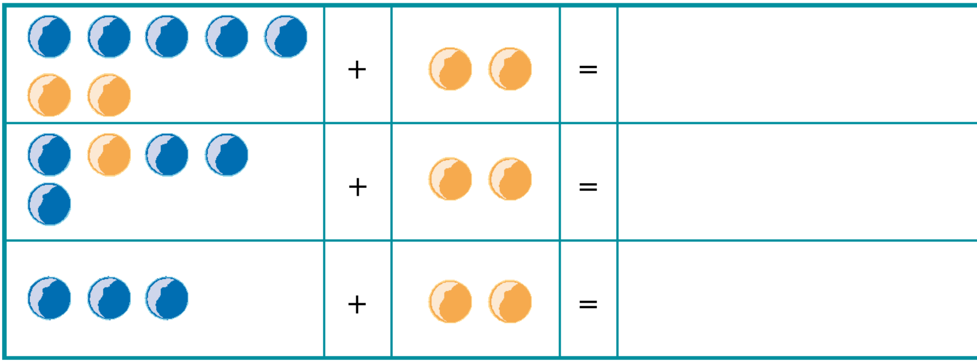
$$(+3) \quad + \quad (-2) \quad = \quad \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cuántos átomos distintos con carga **+3** dibujaron en el grupo para hacer la suma?

>>> Manos a la obra

I. En la siguiente tabla se han dibujado distintos átomos con carga **+3**. Usando estos átomos encuentren la carga final cuando se le agregan **2** electrones.



(+3) + **(−2)** = ________

Comparen sus tablas. Comenten:

¿Cambia el valor de la suma **(+3)** + **(−2)** si cambia el número de protones y electrones del átomo de carga **+3**?

II. En sus cuadernos, representen la siguiente ionización usando círculos azules y anaranjados para las cargas:

A un átomo que tiene originalmente carga total **+5** se le agregan **8** electrones, ¿cuál es la carga que tiene finalmente este átomo? ________________

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos con carga **+5** dibujaron en el grupo para hacer la suma?

b) ¿Cambia el valor de la suma **(+5)** + **(−8)** si cambia el número de pares protón-electrón del átomo de carga **+5**?

III. Hagan las siguientes sumas de números con signo. Pueden representar las cargas usando círculos azules y anaranjados.

a) **(−9)** + **(+1)** = ________ b) **(+4)** + **(−2)** = ________

c) **(−5)** + **(−9)** = ________ d) **(−6)** + **(+6)** = ________

e) **(+3)** + **(+2)** = ________ f) **(+8)** + **(−8)** = ________

g) **(+25)** + **(−33)** = ________ h) **(−24)** + **(−17)** = ________

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Cómo hicieron la suma **(+25) + (–33)**?, ¿dibujaron todas las partículas?

>>> A lo que llegamos

Las **cargas simétricas** o **números simétricos** tienen el mismo valor absoluto y están a la misma distancia del cero en la recta numérica. Por ejemplo: **+6** y **–6** son simétricos. Estos números al sumarse dan cero, es decir: **(–6) + (+6) = (+6) + (–6) = 0**

IV. La suma **(+100) + (–123)** representa la siguiente ionización: a un átomo de carga **+100** se le agregan **123** electrones. ¿Cómo harían la suma sin dibujar las partículas?

A continuación se presenta una manera de hacerlo:

a) Un átomo con carga total **+100** tiene más protones que electrones, ¿cuántos protones más tiene? ____________________

b) Al hacer la ionización, estos **100** protones del átomo se cancelan con **100** de los electrones que se le agregan. ¿Cuántos electrones quedan? ____________________

c) ¿Cuánto es **(+100) + (–123)**? ____________________

V. Resuelvan las siguientes sumas de números con signo. No usen dibujos.

a) **(+105) + (+10) =** ____________________

b) **(–110) + (–150) =** ____________________

c) **(–230) + (+525) =** ____________________

d) **(+125) + (–125)=** ____________________

Comenten sus resultados y sus procedimientos.

>>> A lo que llegamos

- Para sumar **dos números del mismo signo** se pueden sumar los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo de los números que se suman.

  Por ejemplo, para sumar **+3** con **+2**:

  se suma $|+3|$ con $|+2|$: $|+3| + |+2| = 3 + 2 = 5$

  y el signo del resultado es "**+**": **(+3) + (+2) = +5**

  Para sumar **–5** con **–9**:

  se suma $|-5|$ con $|-9|$: $|-5| + |-9| = 5 + 9 = 14$

  y el signo del resultado es "**–**": **(–5) + (–9) = –14**

- Para sumar **dos números de signos distintos** se puede encontrar la diferencia de los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo del número de mayor valor absoluto.

Por ejemplo, para sumar **+3** con **–2**:

se encuentra la diferencia de $|+3|$ y $|-2|$; es decir, $|+3| - |-2| = 3 - 2 = 1$

y el signo del resultado es "+": **(+3) + (–2) = +1**

Para sumar **–9** con **+1**:

se encuentra la diferencia de $|-9|$ y $|+1|$; es decir, $|-9| - |+1| = 9 - 1 = 8$

y el signo del resultado es "–": **(–9) + (+1) = –8**

VI. Los átomos no son útiles para representar números decimales ni fraccionarios, porque los electrones y los protones sólo tienen cargas **–1** y **+1**. Sin embargo, para sumar números decimales y números fraccionarios con signo se pueden usar las dos reglas que acaban de aprender.

Hagan las siguientes sumas usando las reglas anteriores:

a) **(–1.3) + (–1.7) =** ________________

Recuerden que $|-1.3| = 1.3$ y que $|-1.7| = 1.7$

b) Contesten las siguientes preguntas:

¿Cuánto es $\left|+\frac{1}{4}\right|$? ________________

¿Cuánto es $\left|-\frac{3}{4}\right|$? ________________

Encuentren la siguiente diferencia:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$ ________________

Hagan la siguiente suma de números con signo:

$\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) =$ ________________

c) **(–20.5) + (+10.5) =** ________________

Comparen sus resultados y procedimientos. Comenten:

En una telesecundaria dijeron que sumar **–1.3** y **–1.7** es como si a un átomo de carga total **–1.3** se agregara una partícula de carga **–1.7**. ¿Están de acuerdo con esta afirmación?, ¿cómo dibujarían estas partículas?

>>> Lo que aprendimos

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) **(−10) + (+101)** = ____________________

b) **(−31)+ (+15)** = ____________________

c) **(−1.6) + (−1.3)** = ____________________

d) $\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) =$ ____________________

2. Encuentra los simétricos de los siguientes números:

a) El simétrico de $-\frac{1}{4}$ es ________________

b) El simétrico de **+35** es ________________

c) El simétrico de **7.3** es ________________

d) El simétrico de **−10** es ________________

3. La carga total de un átomo se puede calcular mediante sumas de números con signo.

El siguiente átomo tiene **3** electrones, **2** protones y **2** electrones.

Su carga total se puede calcular con la siguiente suma de números con signo:

$$\underbrace{(-3)}_{\text{Carga de } \mathbf{3} \text{ electrones}} + \underbrace{(+2)}_{\text{Carga de } \mathbf{2} \text{ protones}} + \underbrace{(-2)}_{\text{Carga de } \mathbf{2} \text{ electrones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta suma?

(−3) + (+2) + (−2) = ____________________

RESTAS DE NÚMEROS CON SIGNO

>>> Para empezar

En esta sesión continuarás estudiando las operaciones de números con signo. Ahora realizarán **ionizaciones** quitando protones y electrones a algunos átomos. Aprenderás a encontrar la carga final mediante la resta de números con signo.

>>> Consideremos lo siguiente

A un átomo que tenía originalmente carga total **–2** se le quitaron **5** protones, ¿cuál es la carga que tiene ahora este átomo? ____________________

Esta ionización se puede representar mediante la siguiente resta de números con signo:

$$\underbrace{(-2)}_{\text{Carga original del átomo}} \quad \overset{\text{Se quitan partículas}}{-} \quad \underbrace{(+5)}_{\text{Carga de los 5 protones}}$$

¿Cuál es el resultado de esta resta de números con signo?

$$(-2) - (+5) = \underline{\hspace{4cm}}$$

Comparen sus respuestas y comenten:

a) ¿Cuántos átomos distintos con carga **–2** dibujaron en el grupo para hacer esta resta?

b) ¿Se le pueden quitar **5** protones a un átomo de carga **–2**?

>>> Manos a la obra

I. El siguiente átomo tiene **2** electrones, **5** protones y **5** electrones.

Su carga total es **–2** y se puede calcular con la siguiente suma de números con signo:

$$\underbrace{(-2)}_{\text{Carga de 2 electrones}} \quad + \quad \underbrace{(+5)}_{\text{Carga de 5 protones}} \quad + \quad \underbrace{(-5)}_{\text{Carga de 5 electrones}}$$

a) ¿Cuál es el resultado de esta suma? ______________________________

b) Quítenle **5** protones a este átomo, ¿cuál es su carga final? ________________

c) Encuentren el resultado de las siguientes operaciones:

$$(-2) + (+5) + (-5) - (+5) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Se quitan partículas

$$(-2) - (+5) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Se quitan partículas

Comparen sus respuestas. Comenten:

La suma $(+5)+(-5) = 0$, ¿será cierto que $(-2)+(+5)+(-5)-(+5) = (-2)-(+5)$?

II. Los siguientes átomos tienen carga –1:

Átomo A $(-1) + (-4) + (+4)$	**Átomo B** (-1)
	
Átomo C $(-1) + (+1) + (-1)$	**Átomo D** $(-1) + (-5) + (+5)$
	

a) Algunos de estos átomos se pueden usar para quitar **4** protones, ¿cuáles son?

______________________ y ______________________

b) Quiten **4** protones de los átomos que escogieron. ¿Cuál es la carga de los átomos?

____

c) Encuentren el resultado de las siguientes operaciones:

$(-1) + (-5) + (+5) - (+4) =$ ______________________

$(-1) + (-4) + (+4) - (+4) =$ ______________________

d) ¿Cuánto es $(-1) - (+4)$?

$$(-1) - (+4) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Es lo mismo **(–1)** + (–5) + (+5) – **(+4)** que **(–1)** + (–4) + (+4) – **(+4)**?

III. Hay que hacer la resta: **(+46) – (–18)**. ¿Cuál de las siguientes operaciones usarían para hacerla?

(+46) + (+18) – (+18) – **(-18)**

(+46) + (–46) + (+46) – **(–18)**

(+46) + (–18) + (+18) – **(–18)**

Hagan la resta.

(+46) – (–18) = ______________________________

Comparen sus respuestas. Comenten:

En una escuela dijeron que al poner **18** electrones y quitar **18** electrones se cancelan. Para calcular **(+46) – (–18)** escribieron lo siguiente:

$(+46) + (-\cancel{18}) + (+18) - (-\cancel{18}) = (+46) + (+18)$

¿Es cierto que **(+46) – (-18) = (+46) + (+18)**?

IV. Hay que hacer la resta: **(-10) – (-12)**. Contesten las siguientes preguntas para hacerla:

a) ¿Cuántos electrones tendrían que quitarle al átomo? ______________

b) ¿Cuál de las siguientes operaciones les sirve para hacer esta resta?

(-10) + (-10) + (+10) – (-12)

(-10) + (-12) + (+12) – (-12)

c) Completen los cálculos:

(-10) – (-12) = (-10) + __________ **+** __________ **– (-12) =** ______________

Comparen sus respuestas. Comenten:

¿Es cierto que **(-10) – (-12) = (-10) + (+12)**?

>>> A lo que llegamos

Para hacer restas de números con signo se puede sumar el simétrico:

Si A y B son dos números con signo, entonces,

$$A - B = A + (\text{simétrico de } B)$$

Ejemplos:

$$(+2) - (+5) = (+2) + \overbrace{(-5)}^{\text{Simétrico de } +5} = -3$$

$$(-3) - (-5) = (-3) + \overbrace{(+5)}^{\text{Simétrico de } -5} = +2$$

V. Usen la regla anterior para hacer las siguientes restas:

a) Hay que hacer la resta $\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)$. Contesten las siguientes preguntas para ayudarse:

¿Cuál es el simétrico de $-\frac{1}{4}$? __________________________

¿Cuánto es $\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$? __________________________

Hagan la resta:

$\left(+\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) =$ ____________________

> *Recuerden que:*
> *Para hacer sumas de números del mismo signo se suman los valores absolutos de los números y el signo del resultado es el signo de los números.*

b) Hay que hacer la resta **(–20.5) – (+10.5)**. Contesten las siguientes preguntas para ayudarse:

¿Cuál es el simétrico de **+10.5**? ________________________________

¿Cuánto es **(–20.5) + (–10.5)**? ________________________________

Hagan la resta:

(–20.5)– (+10.5) = (–20.5) + (–10.5) = __________________________

>>> Lo que aprendimos

Resuelve las siguientes operaciones

a) $(-10) - (-30) =$ ______

b) $(+120) - (-17) =$ ______

c) $(-6) - (-9) =$ ______

d) $(-5.4) - (+10) =$ ______

e) $(+3.6) - (-1.3) =$ ______

f) $\left(+\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) =$ ______

SESIÓN 4

DE TODO UN POCO

>>> Para empezar

Las operaciones de números con signo pueden usarse para resolver problemas que aparecen en distintos contextos de la vida cotidiana: en las pérdidas y ganancias de una tienda, los goles a favor y en contra obtenidos en un torneo de futbol, etcétera.

En esta sesión usarás sumas y restas de números con signo para resolver este tipo de problemas.

>>> Lo que aprendimos

1. En la siguiente tabla se registran los goles a favor y en contra de varios equipos que participan en un torneo de futbol. La diferencia de goles de cada equipo se obtiene al hacer la resta: goles a favor menos goles en contra. Completen la tabla.

Equipo	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
Gatos	5	2	3
Pandas		6	−3
Lobos	0		−2
Coyotes	4	4	
Correcaminos	3		3
Perros		3	−1
Osos	6	1	
Conejos		1	−1
Mapaches		3	0

2. La siguiente tabla reporta el balance de una tienda a lo largo de 7 meses de trabajo. El saldo por mes es la diferencia entre las ganancias y los gastos.

Completen la tabla:

Balance de una tienda de abarrotes

	Ganancias ($)	Gastos ($)	Saldo ($))
Enero	10 000.25	9 328.15	+672.10
Febrero	9 235.36	9 875.95	–640.59
Marzo	12 568.12	10 139.00	
Abril	1 765.00	5 328.90	
Mayo	10 525.30		+2 545.50
Junio		8 328.00	–328.00
Julio	6 728.00		–4 216.00

3. Resuelvan las siguientes operaciones con números negativos y positivos:

a) **(–8) + (–30)** = ____________________

b) **(+101) – (–17) + (–17)** = ____________

c) **(–21) + (–5) – (–10)** = ______________

d) **(–13) – (–8) – (–7)** = _______________

4. Resuelvan las siguientes operaciones:

a) **(–1.25) + (+7.43)** = ________________

b) **(+ 6.7) – (–2.1)** = __________________

c) $(+\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{2}) =$ ____________________

d) $(-\frac{1}{3}) - (+\frac{8}{5}) =$ ____________________

>>> Para saber más

Sobre las operaciones con números positivos y negativos consulta:
http://www.conevyt.org.mx/cursos/enciclope/op_basicas.html
Ruta: entrar al acceso directo operaciones con números positivos y negativos.
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
CONEVyT (Consejo Nacional de Educación para la Vida y el Trabajo).

Áreas de figuras planas

En esta secuencia resolverás problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas.

SESIÓN 1

ÁREAS DE FIGURAS FORMADAS POR RECTAS

>>> Para empezar

A lo largo del curso has estudiado y trabajado con fórmulas para calcular distintas áreas; en esta secuencia resolverás problemas de cálculo de áreas de figuras formadas por rectas, círculos y semicírculos y aplicarás lo que aprendiste en algunas secuencias de geometría.

Geometría andaluza

Los árabes hicieron uso de las matemáticas para construir casas y edificios. Hermosos ejemplos son la Alhambra y el Alcázar en Andalucía, donde muchos de los pisos y paredes están hechos a partir de diseños geométricos.

>>> Lo que aprendimos

1. En la figura 1 está señalada una parte de un piso que aparece en la Alhambra. Los lados de las baldosas cuadradas miden 1 m y los lados de las baldosas rectangulares (azules, rojas y grises) miden 1 m por 50 cm.

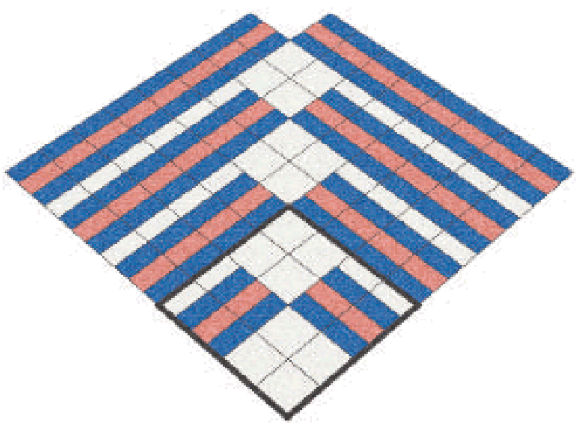


Figura 1

Tomando en cuenta sólo la parte del piso que está dentro de la línea negra, contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área de esta parte del piso? ___

b) ¿Cuánto mide el área de la región cubierta por las baldosas grises (tanto cuadradas como rectangulares)? ___

c) ¿Cuántas veces más grande es el área de la región azul que el área de la roja? ___

d) Comenten sus resultados y compárenlos.

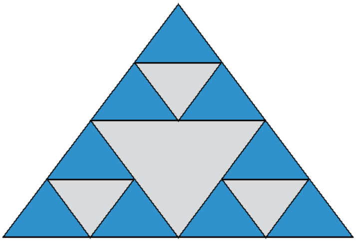


Figura 2

2. Contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área del triángulo completo? ___

b) ¿Cuánto mide el área de la región azul? ___

c) ¿Cuánto mide el área de la región gris? ___

Comparen sus soluciones y comenten:

¿Cómo calcularon el área de las dos regiones?

3. Midan lo que sea necesario en la figura 3 y contesten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto mide el área de la región azul?

___

b) ¿Cuánto mide el área de la región blanca?

___

c) Escriban en sus cuadernos los procedimientos que utilizaron para calcular las áreas de la región azul y de la región blanca.

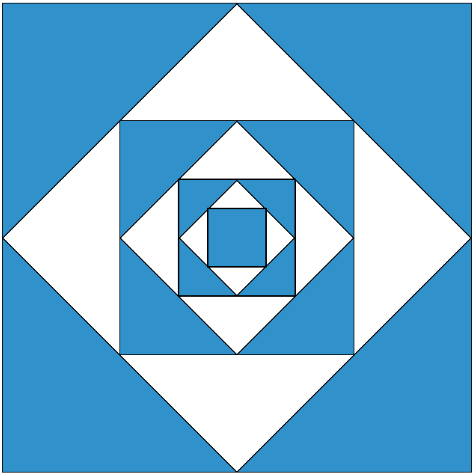


Figura 3

Comenten sus procedimientos.

SESION 2

ÁREAS DE FIGURAS FORMADAS POR CÍRCULOS

>>> Lo que aprendimos

1. Midan lo que sea necesario y contesten las siguientes preguntas:

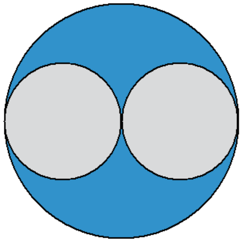


Figura 1

a) ¿Qué figuras geométricas aparecen en la figura 1?

b) ¿Cuál es el área de la región azul?

c) Tracen los ejes de simetría de la figura 1.

Comenten sus procedimientos y contesten:

a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene la figura 1?

b) ¿Cómo creen que se construyó esta figura? Cópienla en sus cuadernos.

2. Midan lo que sea necesario y copien la siguiente figura en su cuaderno.

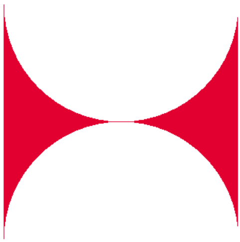


Figura 2

a) ¿Cuánto mide el área de la región roja?

b) Tracen los ejes de simetría de la figura roja.

Comparen sus respuestas y comenten los procedimientos que utilizaron para copiar la figura.

3. Midan lo que sea necesario y contesten las siguientes preguntas:

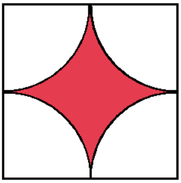


Figura 3

a) ¿Cuánto mide el área de la región roja?

b) Tracen los ejes de simetría de la figura.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) Los procedimientos que utilizaron para calcular el área de la región roja.

b) Cómo se construyó esta figura. Cópienla en sus cuadernos.

4. Midan lo que sea necesario y copien la figura 4 en sus cuadernos:

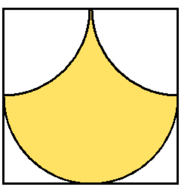


Figura 4

a) ¿Cuánto mide el área de la figura amarilla?

b) Tracen sus ejes de simetría.

Comparen sus respuestas y comenten:

a) Los procedimientos que utilizaron para calcular el área de la región amarilla.

b) ¿Cómo encontraron los ejes de simetría de la figura?

>>> Para saber más

Sobre diseños geométricos en pisos consulten:
http://www.interactiva.metem.unam.mx
Ruta: Geometría ⟶ Teselados.
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].
Sobre problemas de cálculo de áreas sombreadas consulten:
Calendario matemático infantil 2005-2006. Un reto diario.

Juegos equitativos

En esta secuencia reconocerás las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

SESIÓN 1

¿CUÁL ES LA MEJOR OPCIÓN?

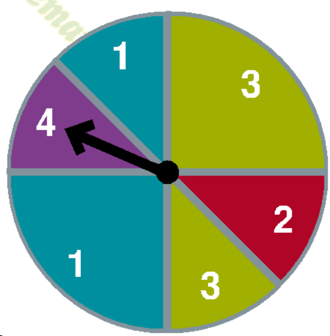
>>> Para empezar

Entre las personas hay muchos malentendidos alrededor del concepto de probabilidad. Prueba de ello es el gran número de negocios surgidos en los últimos años que prometen riquezas enormes a la vuelta de la esquina. Tal es el caso de las loterías y las quinielas.

>>> Consideremos lo siguiente

Construyan una ruleta como se muestra a continuación.

Ruleta 1



Realicen el siguiente juego:

- Cada uno de los cuatro jugadores deberá elegir un número del 1 al 4.
- Van a girar la ruleta 30 veces. En cada turno se anota un punto el alumno que tiene el mismo número que el resultado de la ruleta.
- El ganador del juego es el alumno que tenga más puntos.

a) Antes de empezar el juego, ¿crees que vas a ganar? ____________________

b) ¿Por qué? ____________________________________

c) En la siguiente tabla, marquen con una "**X**" los resultados de cada turno y el total de puntos que cada jugador obtuvo al girar 30 veces la ruleta.

Jugador	Turnos																														Total de punto
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

d) ¿Qué número fue el ganador? ____________________

e) ¿Cuál crees que es la razón por la cual ganó? ____________________

f) Si vuelven a jugar, ¿crees que gane el mismo número? ____________________

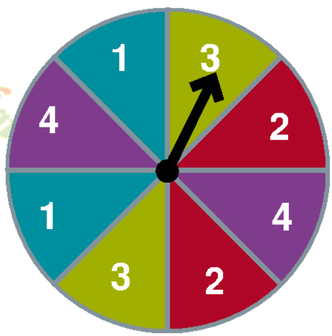
¿Por qué sí o por qué no? ____________________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

1. Ahora van a jugar utilizando la ruleta **2**. Las reglas del juego siguen siendo las mismas que en el juego anterior.

a) Registren los resultados en la tabla.



Ruleta 2

Jugador	Turnos																														Total de punto
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

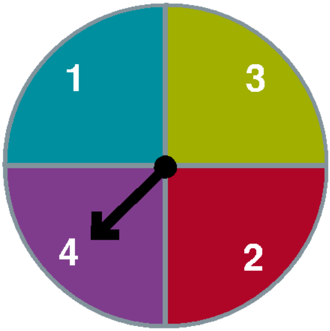
b) ¿Hay algún jugador o número que tenga mayor posibilidad de salir ganador? ____________________

c) ¿Qué número fue el ganador? ____________________

d) De acuerdo con los resultados registrados en la tabla, ¿cuál es la probabilidad frecuencial del número ganador? ____________________

II. Se utiliza la ruleta **3** para realizar el juego y las reglas no cambian.

Ruleta 3



a) ¿Quién creen que gane? ____________________

b) ¿Hay algún jugador que tenga más posibilidades de ganar? ____________________

¿Por qué? ____________________

c) Registren los resultados en la siguiente tabla.

Jugador	Turnos																														Total de puntos
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Jugador 1																															
Jugador 2																															
Jugador 3																															
Jugador 4																															

d) De acuerdo con los resultados registrados en la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que caiga 3? ____________________

e) ¿Y de que caiga 2? ____________________

f) De acuerdo con los resultados obtenidos en cada juego, ¿consideran que hay alguna ruleta que favorece a un jugador? ____________________

¿Por qué? ____________________

III. Van a comparar los tres juegos. Para ello es necesario calcular las siguientes probabilidades clásicas.

Evento	Probabilidad en la ruleta **1**	Probabilidad en la ruleta **2**	Probabilidad en la ruleta **3**
Caer 1			
Caer 2			
Caer 3			
Caer 4			

a) De acuerdo con las probabilidades clásicas obtenidas, ¿qué juego no fue justo o equitativo? ____

b) ¿Qué juego es justo? ____

c) ¿Qué juegos son equivalentes? ____ ¿Por qué? ____

>>> A lo que llegamos

Para determinar si un juego de azar es justo se debe establecer:

- **Si en cada turno o partida todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar.**
- **Si las probabilidades de todos los jugadores son diferentes, es justo que a quien elija el número con menor probabilidad se le dé un mayor premio para compensar.**
- **Reglas del juego que no favorezcan a ninguno de los jugadores.**

RULETAS

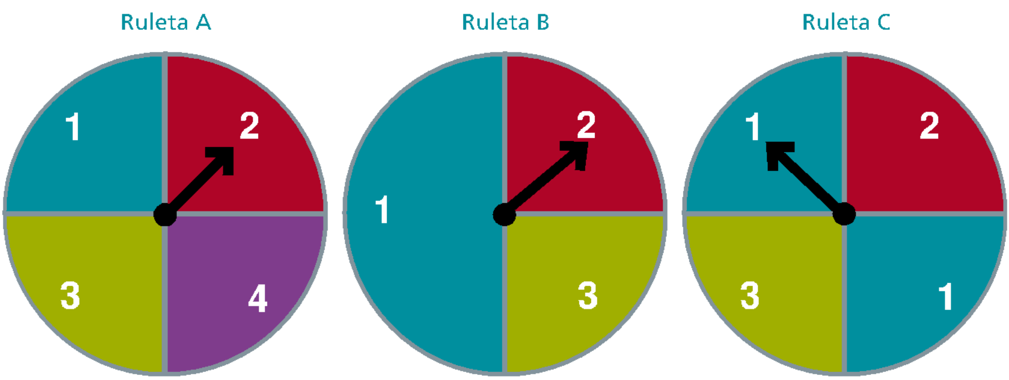
SESIÓN 2

>>> Para empezar

En esta sesión aprenderás a identificar qué elementos (ruletas, dados, etc.) cambiar en el juego para que sea justo.

>>> Consideremos lo siguiente

Van a jugar a la ruleta. Cada alumno elige la ruleta con la que desea jugar y la hace girar **5** veces. Gana el jugador que más veces haya obtenido el número **1**.



Antes de iniciar el juego responde, ¿qué ruleta creen que gane? ____

Después de realizar el juego, ¿creen que si vuelven a jugar, ganará la misma ruleta? ____

¿Por qué? ____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Anoten los resultados en la tabla y contesten las siguientes preguntas.

Jugador de la ruleta	Puntos en cada ronda					Total de puntos (número total de veces que cayó 1)
	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	
A						
B						
C						

a) ¿Quién ganó? ______________________________

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de caer 1 en cada ruleta? ________________

c) Si realizaran el juego una vez más, ¿quién crees que gane ahora? ________________

d) De acuerdo con los resultados de todos los equipos del grupo, ¿cuál es la ruleta que más veces ganó? ______________________________

II. Analicen la situación anterior contestando las siguientes preguntas.

a) Comparen la ruleta **A** con la ruleta **B**, ¿con cuál se tiene más oportunidades de ganar? ____________________ ¿Por qué? ____________________

b) ¿Y entre las ruletas **B** y **C**? ______________________________

c) ¿Cuál es la probabilidad clásica o teórica de obtener 1 en la ruleta **A**?

____

d) En la ruleta **B**, ¿cuál es la probabilidad clásica de obtener 1?

____

e) Finalmente, ¿cuál es la probabilidad clásica de obtener 1 en la ruleta **C**?

____

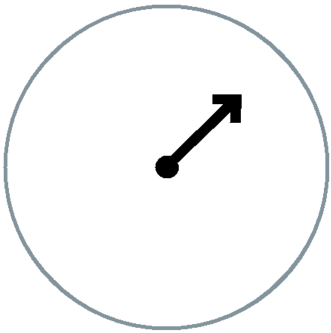
f) De acuerdo con la probabilidad de obtener 1 en cada ruleta, ¿consideras que el juego es justo? ____________________ ¿Por qué? ____________________

Como ves, el juego con las ruletas no es justo porque la probabilidad de obtener 1 en la ruleta **A** es menor que en las otras dos ruletas.

III. Si quieren que el juego sea justo utilizando tres ruletas, tendrían que cambiar la ruleta A.

a) ¿Cómo tendrían que rotular o etiquetar la nueva ruleta para realizar el juego? Utilicen el dibujo para representar la nueva ruleta.

Ruleta D



b) ¿Cómo la etiquetaron otros compañeros? ______________________

____

c) ¿Son diferentes? ____________ ¿En qué son diferentes? ____________

____

d) ¿En qué son iguales? ______________________

____

e) ¿Cuál es la probabilidad clásica de obtener 1 en cada ruleta?

Tu ruleta ____________ Ruleta de otro compañero ____________

f) En tu grupo, ¿alguien etiquetó la ruleta de diferente manera que las de tu equipo?

____________ Anoten cómo lo hizo ______________________

____

____

>>> A lo que llegamos

Para poder determinar si el juego es justo, no es suficiente considerar los resultados obtenidos en las rondas. Como habrás observado, en algunos equipos ganó una ruleta y en otros otra. En este caso, para determinar si un juego es justo se requiere calcular la probabilidad clásica o teórica del evento que interviene en el juego.

JUEGOS CON DADOS

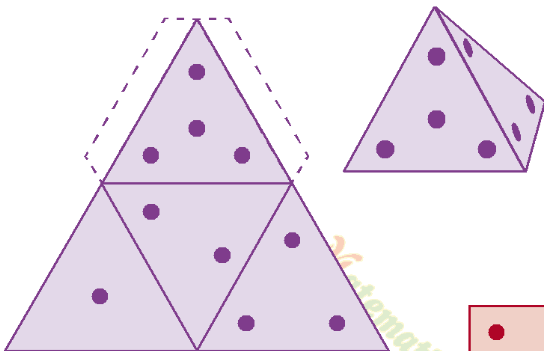
>>> Para empezar

En esta sesión realizarás juegos con dados de formas diferentes y aprenderás a distinguir cuándo un juego es justo y cuándo no.

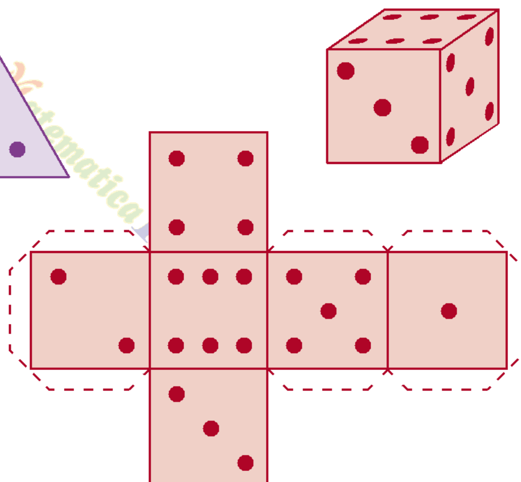
>>> Consideremos lo siguiente

Un dado común tiene seis caras cuadradas; pero hay otros con cuatro caras triangulares.

Van a necesitar dos dados, uno con seis caras y otro con cuatro. Si no los tienen, utilicen los siguientes desarrollos planos para armarlos. Cópienlos en cartoncillo y armen uno cada quien.



Dado A



Dado B

Lance cada quien el dado que armó. Cuando alguno obtenga el número 3, avanza una casilla. El juego termina cuando alguno de los jugadores llega primero a la meta. ¿Con cuál dado crees que se obtenga primero el número 3? ____________________

____

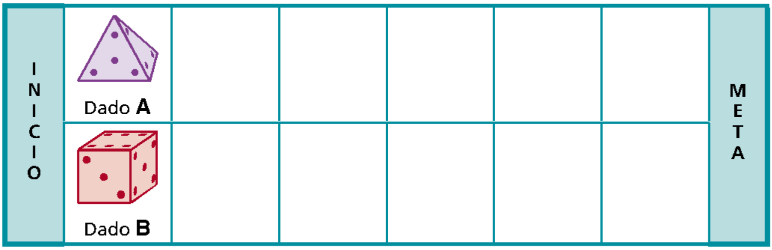
Si en vez de avanzar cuando se obtiene el número 3 lo hacen cuando se obtiene un número impar, ¿alguno de los dados tiene más posibilidades de ganar que otro? ________

¿Por qué? ____

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Realicen el primer juego. Lance cada quien su dado. Cuando alguno obtenga el número 3, avanza una casilla.



a) ¿Quién creen que gane? ____________________

b) Después de veinte lanzamientos, ¿qué jugador ha avanzado más casilleros? ________

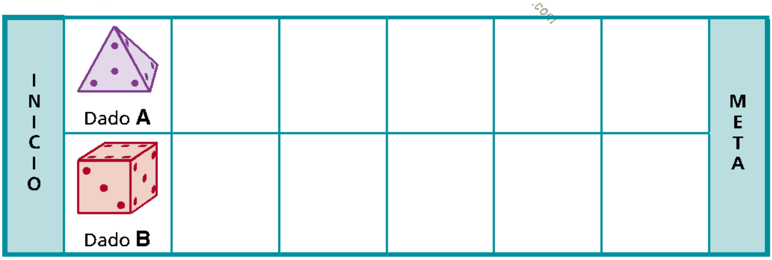
c) ¿Cuáles son los resultados posibles al lanzar el dado cúbico? ____________

d) ¿Y del dado tetraédrico? ____________________

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3 en el dado cúbico? ____________

f) ¿Y en el dado tetraédrico? ____________________

II. Realicen el juego. Lance cada quien su dado, pero ahora avancen cada vez que cae un número impar.



a) ¿Quién creen que gane ahora? ____________________

b) Después de **10** lanzamientos, ¿qué jugador ha avanzado más casilleros? ________

c) Expliquen qué sucede si en vez de avanzar cuando cae 3, se avanza cuando cae un número impar. ____________________

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento caer un número impar en el dado cúbico?

____

e) ¿Y cuál es la probabilidad del evento caer un número impar en el dado tetraédrico?

____

>>> A lo que llegamos

Como ves, en este juego los eventos caer un número impar y caer 3 en cada dado son las reglas principales con las cuales se realiza cada juego.

III. Cada quien escriba un evento para que al jugar con el dado tetraédrico siempre sea posible avanzar. ____________________

a) Con ese evento, calcula la probabilidad de avanzar una casilla con cada dado:

Dado cúbico ______________ Dado tetraédrico ______________

b) Intercambien sus eventos. Escribe el evento de tu compañero. ______________

____

c) ¿Qué probabilidad tiene de ocurrir el evento de tu compañero con cada dado?

Dado cúbico ______________ Dado tetraédrico ______________

Comparen sus respuestas y comenten:

- ¿Con los eventos que propusieron, siempre avanza el dado tetraédrico?
- En cada caso, ¿qué sucede con el dado cúbico?
- Existirá algún otro evento diferente en el cual siempre avance el dado cúbico?

IV. Escriban un evento para que con ambos dados se tenga la misma probabilidad de avanzar. ____________________

a) Con ese evento, calcula la probabilidad de avanzar una casilla con cada dado:

Dado cúbico ______________ Dado tetraédrico ______________

b) Intercambia tu evento con el de un compañero. Escribe el evento de tu compañero.

____

c) ¿Qué probabilidad tiene de ocurrir el evento de tu compañero con cada dado?

Dado cúbico ______________ Dado tetraédrico ______________

Comparen sus respuestas.

>>> A lo que llegamos

Existen juegos de azar en los que las reglas con las cuales se realiza dan mayor ventaja a un resultado que a otro. Esto sucede cuando la regla del juego corresponde a un evento que tiene mayor probabilidad de suceder que otro.

QUINIELAS

>>> Para empezar

En esta sesión analizarás las condiciones de algunos juegos de azar y determinarás el premio del juego para que cada participante tenga la misma oportunidad de ganar.

Pronósticos nacionales

Para ganar el premio mayor en una quiniela de futbol, es necesario que aciertes a los resultados de 14 partidos de futbol *soccer*. Estos partidos pueden ser de la primera división, de la primera A o internacionales.

El objetivo es tratar de obtener el mayor número de aciertos, ya que, además del premio mayor, existen otros inferiores. El resultado de cada encuentro es el que se obtiene en los 90 minutos de juego regular. La quiniela sencilla cuesta $10.00 y sólo se puede marcar una opción de resultado por encuentro: **LOCAL, EMPATE O VISITANTE.**

Existen quinielas dobles y triples, pero sus costos son diferentes.

>>> Consideremos lo siguiente

Un grupo de 20 amigos organizó una quiniela formada con los dos partidos de ida de semifinal del campeonato de apertura 2005 del futbol de primera división:

FUTBOL DE PRIMERA DIVISIÓN

SEMIFINAL CAMPEONATO DE APERTURA 2005

PARTIDOS DE IDA

LOCAL		EMPATE		VISITANTE
◯	TIGRES	◯	MONTERREY	◯
◯	TOLUCA	◯	PACHUCA	◯

Cada participante debe pagar $15.00 y sólo se puede marcar una opción de resultado por encuentro: **LOCAL, EMPATE O VISITANTE.**

a) El ganador de la quiniela es el que acierte al resultado de los dos partidos. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en estos resultados? ______________

Comparen sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) De acuerdo con los resultados que se pueden dar en el encuentro de futbol Toluca-Pachuca, ¿qué probabilidad hay de que el resultado sea empate? ______

b) ¿Y de que gané el visitante? ______________________________

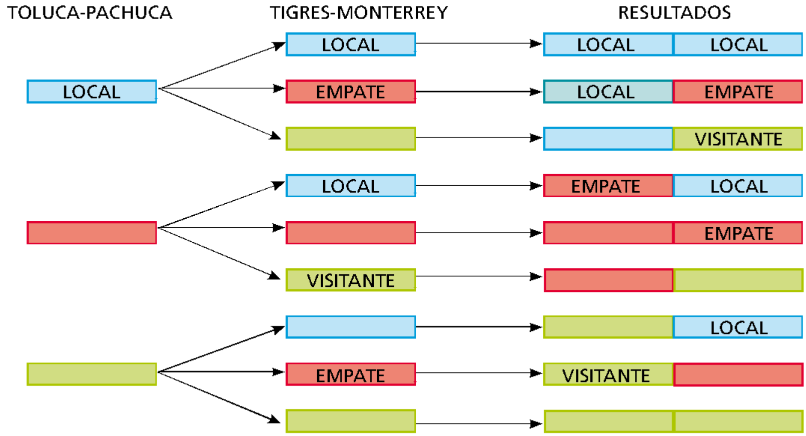
c) Cada integrante del equipo debe llenar una quiniela sencilla. Al compararlas, ¿marcaron los mismos resultados? ______________________

¿Por qué? ______________________________

d) ¿Cuántas formas diferentes de llenar la quiniela sencilla hay? __________

e) Completen el siguiente diagrama de árbol para encontrarlas.

Posibles resultados de los partidos de ida de la semifinal 2005



Recuerden que:

La probabilidad clásica de un evento se obtiene dividiendo el número de los resultados favorables del evento entre el número total de resultados posibles que se pueden dar en la situación de azar:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables del evento}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

f) Con base en este conteo, ¿cuál es la probabilidad de tener la quiniela ganadora? __________

II. Consideren que en vez de jugarse dos partidos en la quiniela, aparecen tres:

a) Cada integrante del equipo deberá llenar una quiniela sencilla. Al compararlas, ¿marcaron los mismos resultados? __________

¿Por qué creen que sucedió? __________

____

b) ¿Cuántas formas diferentes de llenar la quiniela hay? __________

c) Completen el siguiente arreglo rectangular para encontrarlas.

	PARTIDOS		
RESULTADOS	TIGRES-AMÉRICA	TOLUCA-CRUZ AZUL	MONTERREY-TECOS
	LOCAL		LOCAL
	LOCAL	LOCAL	
			VISITANTE
		EMPATE	LOCAL
	LOCAL		
		EMPATE	VISITANTE
	LOCAL		EMPATE
	LOCAL	VISITANTE	
		LOCAL	LOCAL
	EMPATE	LOCAL	
			VISITANTE
		EMPATE	
	EMPATE		
		EMPATE	
	EMPATE		LOCAL
	EMPATE		
		VISITANTE	VISITANTE
	VISITANTE	LOCAL	
	VISITANTE		EMPATE
		LOCAL	
	VISITANTE		LOCAL
		EMPATE	
	VISITANTE		VISITANTE
		VISITANTE	

d) Con base en este conteo, ¿cuál es la probabilidad de tener la quiniela ganadora?

____

III. Comparen sus resultados con los demás equipos completando la siguiente tabla.

Total de resultados que puede haber en 1 partido de futbol	Total de resultados que puede haber en dos partidos de futbol	Total de resultados que puede haber en tres partidos de futbol

Probabilidad de acertar el resultado del partido	Probabilidad de acertar a los resultados de los dos partidos	Probabilidad de acertar a los resultados de los tres partidos

a) ¿Qué relación hay entre el número de partidos que se juegan y el número de resultados que se pueden obtener? ______________________________

b) ¿En qué caso es menor la probabilidad de acertar a los resultados: cuando es un solo partido, cuando son dos o cuando son tres? ______________________

IV. Si los resultados de los tres partidos fueron:

Partido	Resultado
Tigres-América	Local
Toluca-Cruz Azul	Visitante
Monterrey-Tecos	Empate

Y una persona falló sólo en el resultado del partido Toluca-Cruz Azul,

a) ¿De cuántas formas diferentes pudo haber llenado su quiniela? ____________

b) Si con esos resultados gana el segundo lugar, ¿cuántas formas diferentes de obtener el segundo lugar hay? ______________________________

c) ¿Cúal es la probabilidad de obtener el segundo lugar? ________________

Un alumno propuso repartir el premio de \$300.00 de la siguiente manera:

Primer lugar: \$150.00

Segundo lugar: \$150.00

Y explicó: si el monto es de \$300.00, lo divido en dos partes, es decir, \$150.00 para cada ganador, porque en cada caso hay sólo una forma de acertar.

d) ¿Consideran que esta forma de repartir los premios es justa? ____________

¿Por qué? ____

e) Escriban una forma de repartir los premios que crean justa y coméntenla a su compañero, no olviden explicar por qué la consideran justa. ____________

____

____

f) Las siguientes son algunas propuestas de repartir los premios al primero y segundo lugar en acertar a los resultados de tres partidos. Escriban una razón para aceptar o rechazar cada propuesta.

Premio	Acepta	Rechaza	Justificación
Primer lugar: \$200 Segundo lugar: \$100			
Primer lugar: \$175 Segundo lugar: \$125			

>>> A lo que llegamos

En un juego de azar, si la probabilidad de un evento es mayor que la de otro, es justo asignar un mayor premio al evento de mayor probabilidad.

>>> Lo que aprendimos

1. Al lanzar dos monedas, dos posibles resultados son:

moneda 1		moneda 2
águila		águila
	y	
moneda 1		moneda 2
águila		sol

Van a necesitar dos monedas no trucadas.

Realicen el siguiente juego. Lance cada quien las dos monedas consecutivamente. Si te caen dos águilas, ganas 1 punto. En otro caso gana 1 punto tu compañero. El juego termina cuando alguno de los jugadores logra 5 puntos.

a) ¿Qué otros resultados pueden ocurrir al lanzar dos monedas consecutivamente?

____

b) ¿Quién ha obtenido más puntos? _______________________________

c) Completen el cuadro con los resultados de tu juego. Escriban en cada casilla el número de veces que ha ocurrido ese resultado.

d) Comparen sus resultados con los resultados que obtuvo su compañero.

e) ¿Cómo podrían modificar el juego para que sea justo?

____

		Moneda 2	
		Águila (A)	Sol (S)
Moneda 1	Águila (A)		
	Sol (S)		

>>> Para saber más

Consulten en las Bibliotecas Escolares y de Aula:

Bosch, Carlos. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2001.

Sobre los diferentes juegos de lotería y quinielas que ofrecen la Lotería Nacional y Pronósticos Deportivos, así como de la función social que desarrollan consulten:

http://www.esmas.com./pronosticos [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

http://www.loterianacional.gob.mx [Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Gráficas, tablas y expresiones algebraicas

En esta secuencia aprenderás a calcular valores faltantes a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), relacionando las representaciones que corresponden a la misma situación e identificando aquellas que son de proporcionalidad directa.

SESIÓN 1

GRÁFICAS, TABLAS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS ASOCIADAS A PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

>>> Para empezar

Elementos de la proporcionalidad directa

Como han aprendido en las secuencias 31 y 32 de su libro de *Matemáticas I, volumen II* los problemas en los cuales están involucradas cantidades directamente proporcionales tienen los siguientes tres elementos que se deben tomar en cuenta para su resolución

- **La tabla.**
- **La expresión algebraica.**
- **La gráfica.**

A lo largo de esta secuencia estudiarán cómo usar estos 3 elementos de distintas formas para resolver problemas de cantidades directamente proporcionales.

>>> Consideremos lo siguiente

Consideren la expresión algebraica:

$$y = 2x$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones tienen asociada la expresión algebraica anterior? Justifiquen sus respuestas.

a) El tipo de cambio de francos franceses a pesos mexicanos, si por cada franco francés se obtienen dos pesos mexicanos.

b) Las edades de Juan y Laura si se sabe que cuando Juan cumpla 16 años, tendrá dos veces la cantidad de años que tendrá Laura.

c) El costo de cierto número de llamadas si cada llamada cuesta dos pesos.

Recuerden que:
El tipo de cambio de francos franceses a pesos mexicanos es la cantidad de pesos mexicanos que se obtienen al cambiar un franco francés.

d) El tipo de cambio de pesos uruguayos a pesos mexicanos, si por cada dos pesos uruguayos se obtiene un peso mexicano.

>>> Manos a la obra

I. Encuentren la expresión algebraica que permite calcular la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar determinada cantidad de francos, es decir, el tipo de cambio de francos a pesos (situación del inciso a).

Representen con la letra ***x*** la cantidad de francos que se van a cambiar y con la letra ***y*** la cantidad de pesos que se obtienen al cambiar los francos.

____

Encuentren la expresión algebraica asociada al aumento de las edades de Juan y Laura. Representen con la letra ***u*** la cantidad de años que tiene Laura y con la letra ***v*** la cantidad de años que tiene Juan (situación del inciso b).

____

Comparen sus expresiones y comenten cómo las encontraron.

Recuerden que: *Dos cantidades están en proporción directa si al aumentar una (al doble, triple, etc.), o al disminuir (a la mitad, la tercera parte, etc.), la otra aumenta (al doble, triple, etc.), o disminuye (a la mitad, tercera parte, etcétera).*

II. Completen las siguientes tablas para establecer cuál de las dos relaciones anteriores es de proporcionalidad directa.

x (cantidad de francos)	***y*** (cantidad de pesos mexicanos)
0	
1	2
5	
8	
12	
15	

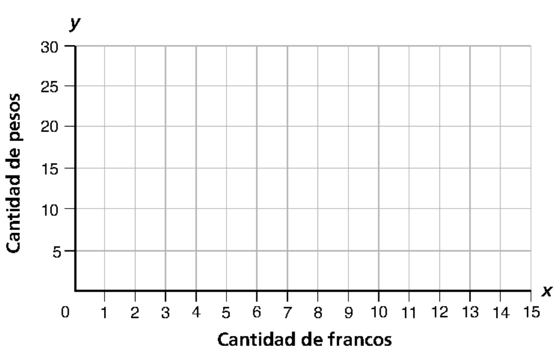
Tabla 1

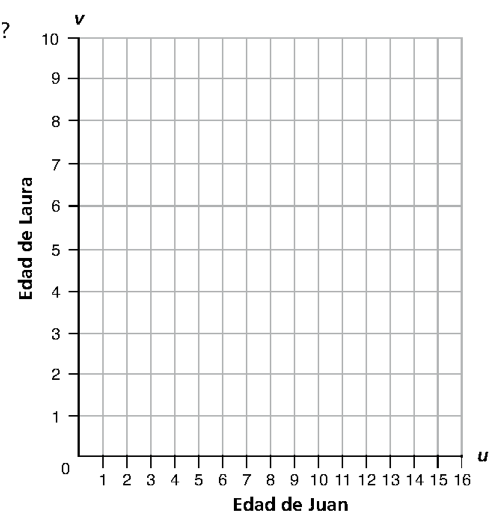
u (edad de Juan)	***v*** (edad de Laura)
16	8
13	
11	
10	
9	
8	

Tabla 2

¿Cuál de las tablas anteriores es de proporcionalidad directa?

III. Con la información de las tablas anteriores completen las siguientes gráficas.





IV. En sus cuadernos encuentren las expresiones, hagan las tablas y las gráficas correspondientes a las relaciones de los incisos c) y d) para determinar si las situaciones tienen asociada la expresión algebraica del inicio de la sesión.

>>> A lo que llegamos

Para determinar si una relación es de proporcionalidad directa se puede hacer lo siguiente:

- **A partir de la relación, construir una tabla para encontrar algunos valores y determinar si esta tabla es de proporcionalidad directa.**
- **A partir de la tabla, construir la gráfica y determinar si los puntos están en una línea recta que pasa por el origen.**
- **Encontrar la expresión algebraica asociada a la situación y determinar si es de la forma $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.**

Puede suceder que distintas situaciones proporcionales tengan la misma expresión algebraica asociada. Por ejemplo, dos de las relaciones de proporcionalidad de esta secuencia son distintas, pero tienen asociada la misma expresión algebraica: $y = 2x$

>>> Lo que aprendimos

1. Considera la siguiente expresión algebraica:

$$y = 3x$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones tienen asociada la expresión algebraica anterior? Justifica tu respuesta.

a) Las ganancias en términos de la cantidad de dinero invertido, si se sabe que por cada dos pesos invertidos se ganan tres pesos.

b) Las velocidades de dos automóviles si uno va al triple de velocidad que el otro.

c) Una máquina produce una lata cada tres segundos. ¿Cuántas latas producirá en x segundos?

SESIÓN 2

DE LA GRÁFICA AL PROBLEMA

>>> Para empezar

En la secuencia 32 del libro de *Matemáticas I* graficaste relaciones de proporcionalidad directa. Recuerda que en el plano cartesiano, los puntos de una gráfica se localizan con coordenadas, como (**A**, **B**). A la primera coordenada **A** se le llama **abscisa,** y a la segunda coordenada **B** se le llama **ordenada**.

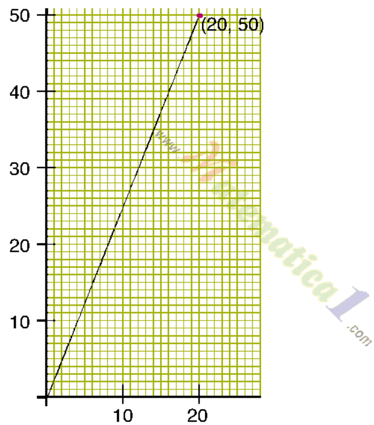
Por ejemplo, el punto (1, 5) tiene como abscisa **1** y como ordenada **5**.

Completa la siguiente tabla, donde se pide encontrar las abscisas y las ordenadas de varios puntos del plano cartesiano.

Punto en el plano cartesiano	Abscisa del punto	Ordenada del punto
$(1, \frac{1}{15})$	1	$\frac{1}{15}$
$(\frac{1}{2}, 7)$		
$(\frac{3}{4}, \frac{17}{5})$		
$(\frac{12}{4}, \frac{1}{2})$		

>>> Consideremos lo siguiente

La siguiente gráfica representa una relación de proporcionalidad directa:



¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones pueden asociarse con la representación de esta gráfica? Justifiquen su respuesta.

a) La relación entre las edades de Héctor y su hija Diana, si se sabe que ahora Héctor tiene 50 años y su hija 20 años.

b) La relación entre la altura y la cantidad de libros, si se sabe que 20 libros alcanzan una altura de 50 cm.

c) El costo de distintas cantidades de caramelos. Una bolsa con 50 caramelos cuesta $20.

>>> Manos a la obra

I. Respondan las siguientes preguntas para encontrar cuáles de las tres situaciones corresponde la gráfica anterior.

a) ¿Qué edad tenía Héctor cuando Diana nació? (se considera que Diana tiene 0 años al nacer). ______________________

Completen la siguiente tabla para determinar algunas de las edades de Diana a partir de la edad de Héctor:

Edad de Héctor	Edad de Diana
50	20
60	
30	
58	

Tabla 1

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra ***x*** la edad de Héctor y con la letra ***y*** la edad de Diana.

____

b) ¿De qué grosor es cada libro? ______________________

Completen la siguiente tabla

Número de libros	Altura que tienen apilados (cm)
20	50
10	
2	
8	

Tabla 2

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra ***x*** el número de libros y con la letra ***y*** la altura.

____

c) ¿Cuántos caramelos compró Óscar si pagó 8 pesos? ______________

Completen la siguiente tabla para determinar el número de caramelos que se compran con distintas cantidades de dinero:

Precio (en pesos)	Número de caramelos
20	50
10	
2	
8	

Tabla 3

Encuentren la expresión algebraica asociada a esta relación. Representen con la letra ***x*** la cantidad en pesos y con letra ***y*** el número de caramelos que compran.

____

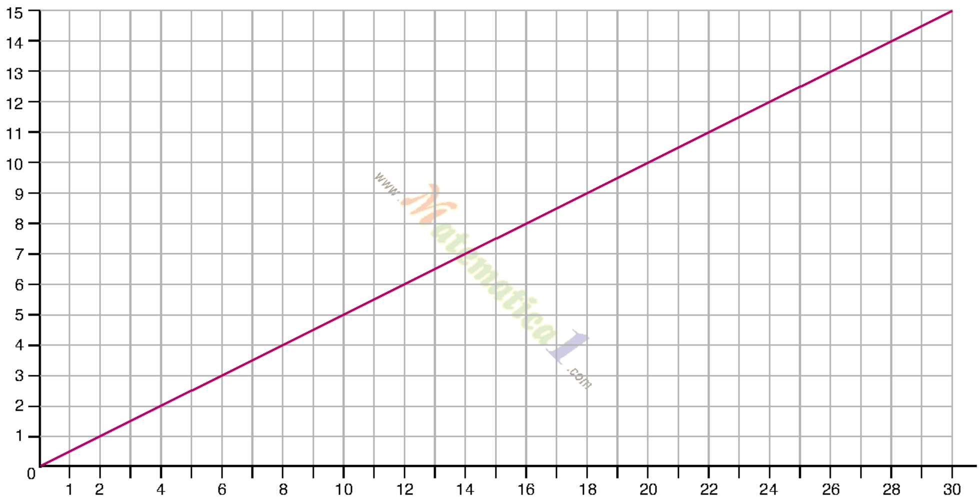
>>> A lo que llegamos

Puede suceder que distintas relaciones de proporcionalidad directa tengan asociada la misma gráfica. Por ejemplo, al graficar las relaciones de proporcionalidad de los incisos b) y c) se obtienen puntos que están sobre la misma línea recta.

Además, si las relaciones de proporcionalidad tienen asociada la misma gráfica, entonces tienen asociadas las mismas expresiones algebraicas.

>>> Lo que aprendimos

Encuentra cuál de las siguientes relaciones de proporcionalidad tiene asociada la siguiente gráfica:



1. A continuación se presentan dos relaciones de proporcionalidad directa:
   - El tipo de cambio de pesos a quetzales guatemaltecos. Recuerda que 5 pesos mexicanos equivalen a 10 quetzales guatemaltecos.
   - El tipo de cambio de pesos a francos. Recuerda que 10 pesos mexicanos equivalen a 5 francos franceses.
2. Encuentra las expresiones algebraicas asociadas a las relaciones de proporcionalidad anteriores. Compara tus gráficas y tus expresiones con un compañero.

>>> Para saber más

Sobre el tipo de cambio entre monedas de distintos países consulta:
http://www.oanda.com/convert/classic?user=etravetware&lang=es
[Fecha de consulta: 23 de agosto de 2007].

Proporcionalidad inversa

En esta secuencia aprenderás a identificar y resolver relaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

SESIÓN 1

EL AGUA

>>> Para empezar

El agua es un líquido esencial para la vida en nuestro planeta. Aunque la Tierra está constituida por 75% de agua, menos de 1% se puede usar para el consumo humano. Como te podrás dar cuenta, es muy importante cuidar del agua, ya que sin ella la vida no sería posible.

>>> Consideremos lo siguiente

Se tiene almacenada agua en 8 tambos de 300 litros de capacidad cada uno. Hay que pasar el agua a tambos de otra capacidad.

a) Si se quisiera pasar toda el agua a 4 tambos de igual tamaño, ¿cuántos litros de capacidad debería tener cada tambo?

b) Si se quisiera pasar toda el agua a 12 tambos de igual tamaño, ¿cuántos litros de capacidad debería tener cada tambo?

>>> Manos a la obra

I. En otra escuela hicieron el mismo problema y encontraron dos procedimientos para calcular la capacidad de cada tambo si se quiere almacenar toda el agua en 12 tambos.

- En el equipo 1 hicieron el siguiente diagrama:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 8 \text{ tambos} & \longrightarrow & 300\ \ell & \\
\text{Entre 2} & + & & + & \text{Entre 2} \\
 & 4 \text{ tambos} & \longrightarrow & 150\ \ell & \\
\hline
 & 12 \text{ tambos} & \longrightarrow & 450\ \ell &
\end{array}
$$

Dijeron que para almacenar toda el agua en 12 tambos cada tambo debería tener capacidad de 450 litros.

- En el equipo 2 hicieron la siguiente tabla:

	x (Número de tambos)	y (Capacidad de cada tambo en litros)	
	8	300	
Entre 2	4	600	Por 2
Por 3	12	200	Entre 3

Dijeron que para almacenar toda el agua en 12 tambos, cada tambo debería tener capacidad de 200 litros.

Comenten:

a) ¿Cuántos litros de agua hay almacenados en 8 tambos de 300 litros cada uno?

b) ¿Cuántos litros de agua se almacenan con la solución dada por el equipo 1?

c) ¿Cuántos litros de agua se almacenan con la solución dada por el equipo 2?

II. Completen la siguiente tabla para calcular la capacidad que debe de tener cada tambo para almacenar 2 400 litros de agua.

x (Número de tambos)	y (Capacidad de cada tambo en litros)
8	300
4	
2	
1	
3	
12	

III. Respondan las siguientes preguntas:

a) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros de agua en 10 tambos, ¿qué capacidad debería tener cada tambo? __________

b) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros en un solo tambo, ¿qué capacidad debería tener? __________

c) Si se quisiera almacenar los 2 400 litros en 32 tambos, ¿qué capacidad debería tener cada tambo? __________

Comenten:

a) Si se divide entre 2 la capacidad de cada tambo, ¿qué sucede con el número de tambos necesarios para almacenar los 2 400 litros de agua?

b) Si se multiplica por 5 la capacidad de cada tambo, ¿qué sucede con el número de tambos necesarios para almacenar los 2 400 litros de agua?

c) ¿Qué pasa con la capacidad de cada tambo cuando el número de tambos aumenta al doble?, ¿y si el número de tambos disminuye a la cuarta parte?

>>> A lo que llegamos

Dos cantidades son inversamente proporcionales si al aumentar una al doble la otra disminuye a la mitad, al aumentar al triple la otra disminuye a la tercera parte, y así sucesivamente.

Por ejemplo, en el problema de esta sesión el número de tambos que se emplean para almacenar el agua y la capacidad que tiene cada uno de los tambos son cantidades inversamente proporcionales.

>>> Lo que aprendimos

1. En una escuela se va a organizar una excursión y van a contratar un autobús que tiene 60 asientos. El autobús les cobra $1 800.00 por el viaje.

a) Si el autobús se llena, ¿cuánto debe pagar cada pasajero por el viaje?

____

b) Si solamente van 20 alumnos a la excursión, ¿cuánto debe pagar cada pasajero?

____

c) Si solamente van 15 alumnos a la excursión, ¿cuánto debe pagar cada pasajero?

____

d) ¿Cuáles son las cantidades que son inversamente proporcionales en este problema?

____

SESIÓN 2

LA VELOCIDAD

>>> Para empezar

La velocidad constante

En las secuencias 6 y 31 del libro de *Matemáticas I* estudiaste problemas relacionados con la velocidad de un automóvil en términos de la distancia recorrida y el tiempo que tarda en recorrerse. En está sesión continuaremos con el estudio de problemas de velocidad.

>>> Consideremos lo siguiente

Para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz se hacen 6 horas viajando en automóvil a una velocidad promedio de 70 kilómetros por hora.

Respondan las siguientes preguntas:

a) Si se hubiera hecho el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en 12 horas, ¿a qué promedio de velocidad se habría viajado?

b) Si se quisiera hacer el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en un tiempo de 3 horas, ¿a qué promedio de velocidad debería viajarse?

c) Si se quisiera hacer el viaje de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en un tiempo de 5 horas, ¿a qué promedio de velocidad debería viajarse?

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para calcular la velocidad promedio para viajar de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz en distintos periodos de tiempo.

El tiempo de viaje está representado por x en la tabla y la velocidad promedio durante el viaje está representada por la letra y en la tabla.

x (en horas)	y (en kilómetros por hora)
6	70
12	35
9	
3	
1	
5	

II. En un equipo de otra escuela hicieron la siguiente observación al llenar la tabla anterior:

$$6 \times 70 = 420$$

$$12 \times 35 = 420$$

Y dijeron:

"Cuando multiplicamos los números de un renglón el resultado siempre es 420".

Multipliquen los números de cada renglón: el número de horas por la velocidad. Anoten sus resultados al lado de la tabla.

Comparen sus resultados y comenten:

a) ¿Coinciden los productos de su tabla con los resultados que obtuvieron en la otra escuela?

b) ¿Están de acuerdo con la observación que hicieron en la otra escuela?

Contesten:

a) ¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz? ______

b) ¿Por qué número hay que multiplicar 5 para obtener 420? ______

c) ¿Por qué número hay que multiplicar 9 para obtener 420? ______

Comparen sus respuestas y comenten:

¿Hay algún número por el cual se multipliquen los datos de la primera columna para obtener los datos de la segunda columna?, ¿cuál?

Recuerden que:
En las tablas de proporcionalidad directa al multiplicar los datos de la primera columna por la constante de proporcionalidad se obtenían los datos de la segunda columna.

>>> A lo que llegamos

En las situaciones que involucran cantidades inversamente proporcionales hay siempre un valor constante. Esta constante resulta de multiplicar las cantidades que son inversamente proporcionales. A este número se le llama constante de proporcionalidad inversa.

Por ejemplo, en el problema anterior, 420 es la constante de proporcionalidad inversa, porque $6 \times 70 = 420$.

III. Si x es el tiempo que se emplea para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz y si y es la velocidad promedio, encuentren una expresión algebraica para calcular la velocidad a partir del tiempo:

$$y =$$

En el pizarrón anoten sus expresiones algebraicas y comenten cómo las obtuvieron.

IV. Usando la expresión algebraica que obtuvieron respondan lo siguiente:

a) ¿A qué velocidad iría el automóvil si recorriera en 2 horas la distancia entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz? ______

b) ¿A qué velocidad iría el automóvil si recorriera en 7 horas la distancia entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz? ______

>>> A lo que llegamos

La expresión algebraica asociada a este problema de **proporcionalidad inversa** es:

$$xy = 420$$

En este caso la letra x representa el tiempo que se emplea para ir de la Ciudad de México a la ciudad de Veracruz, la letra y representa la velocidad promedio y **420** corresponde a la distancia que hay entre la Ciudad de México y la ciudad de Veracruz.

La expresión algebraica que permite obtener y es:

$$y = \frac{420}{x}$$

>>> Lo que aprendimos

1. En tu cuaderno encuentra la constante de proporcionalidad inversa y la expresión algebraica de los problemas de la sesión 1 de esta secuencia.
2. Si 2 campesinos tardan 3 días en sembrar un terreno:

   a) ¿Cuántos días tardarían en sembrar el mismo terreno 6 campesinos?

   ____

   b) Si el terreno se sembró en 6 días, ¿cuántos campesinos lo sembraron?

   ____

LA HIPÉRBOLA

SESIÓN 3

>>> Para empezar

En la secuencia 13 de tu libro de *Matemáticas I, volumen I* y en primaria estudiaste el área y el perímetro de diferentes figuras geométricas. En esta sesión resolverás más problemas relacionados con el área de los rectángulos.

>>> Consideremos lo siguiente

Se sabe que un rectángulo tiene un área de 24 cm² y que su base mide 6 cm de longitud.

a) ¿Cuánto mide su altura? ______________________________

Supongan que el área del rectángulo se mantiene constante, es decir, que el área del rectángulo siempre es de 24 cm². Contesten las siguientes preguntas:

b) Si la base del rectángulo midiera 12 cm de longitud, ¿cuántos centímetros mediría su altura? ______________________________

c) Si la base del rectángulo midiera 8 cm de longitud, ¿cuántos centímetros mediría su altura? ______________________________

d) ¿Cuáles son las cantidades que son inversamente proporcionales en este problema?

____

e) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa? ______________________________

f) Encuentren la expresión algebraica asociada a este problema. ______________________________

>>> Manos a la obra

I. Completen la siguiente tabla para encontrar un lado del rectángulo cuando el otro lado del rectángulo varía. Representen con x la medida de la base y con y la medida de la altura del rectángulo.

x (en centímetros)	y (en centímetros)	Constante de proporcionalidad inversa
6	4	24
	2	
8		
12		
	1	
4		
	0.5	

II. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a esta situación de proporcionalidad inversa? Subráyenla.

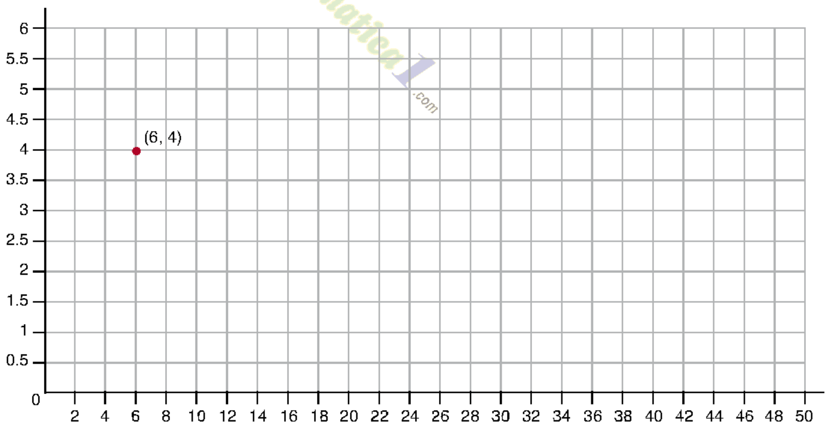
a) $24x = y$

b) $x + y = 24$

c) $24y = x$

d) $xy = 24$

III. Con los datos de la tabla 1 hagan la gráfica correspondiente:



IV. Comparen sus expresiones algebraicas y sus gráficas. Comenten:

a) ¿Puede medir 0 cm de longitud la base de este rectángulo? Recuerden que su área es 24 cm².

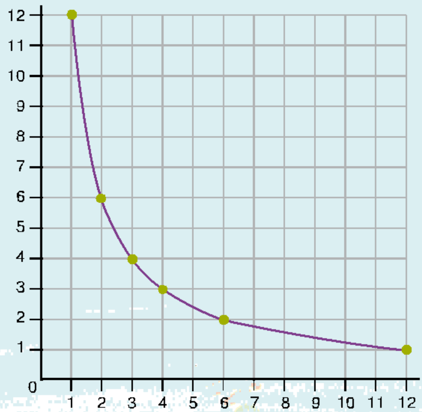
b) ¿Los puntos de esta gráfica están sobre una recta? Tomen tres puntos y traten de unirlos mediante una misma línea recta.

c) ¿Cuáles son las diferencias entre una gráfica de proporcionalidad directa y una gráfica de proporcionalidad inversa?

>>> A lo que llegamos

Los problemas en los cuales están involucradas cantidades inversamente proporcionales tienen asociadas gráficas que se llaman hipérbolas.

Por ejemplo, la siguiente gráfica es la hipérbola que corresponde a la expresión algebraica $xy = 12$



Observa que las hipérbolas no son líneas rectas ni pasan por el origen.

>>> Lo que aprendimos

1. Dos pintores tardan 50 horas en pintar la parte exterior de un edificio.

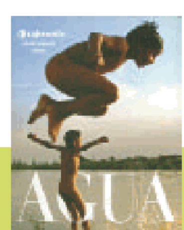
a) Completa la siguiente tabla para determinar cuánto tiempo tardan en pintar la misma parte exterior del edificio distintos números de pintores.

x (número de pintores)	y (horas que tardan en pintar el edificio)	Constante de proporcionalidad inversa
2	50	
4		
5		
10		
1		

b) Con los datos de la tabla 2, en tu cuaderno encuentra la expresión algebraica correspondiente y construye la gráfica.

>>> Para saber más

Sobre la importancia que tiene el agua y sobre su escasez y cuidado consulta: *Agua*, publicado por el periódico *La Jornada* en 2005.



Medidas de tendencia central

En esta secuencia aprenderás a comparar el comportamiento de 2 o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

SESIÓN 1

PROMEDIOS

>>> Para empezar

Promedios

Seguramente ya tienes una idea sobre el promedio y lo has utilizado en más de una ocasión. ¿Cuántas veces has preguntado a tus maestros cuál es el promedio de tus calificaciones?

El promedio también es muy usado en las conversaciones cotidianas. Se habla de que los hombres y las máquinas trabajan a una velocidad promedio, o que los jugadores de diversos deportes comparan sus promedios de puntuación. Sin embargo, además del promedio, existen otros valores estadísticos, como la moda y la mediana, y juntos forman las medidas de tendencia central.

>>> Consideremos lo siguiente

Para llegar a la escuela, Jesús puede utilizar cualquiera de dos líneas de autobuses. Él llega a la parada a las 7:00 de la mañana. Para saber el tiempo que esperó cada día, lo fue registrando durante dos semanas.

La siguiente tabla muestra la línea del autobús en que viajó y el tiempo que tuvo que esperar en los últimos 10 días.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Línea del autobús	B	A	A	B	A	A	B	B	A	B
Tiempo de espera (minutos)	10	4	10	6	4	6	9	2	8	6

¿Qué tiempo creen que Jesús tenga que esperar al autobús el día 11?

Comenten cómo determinarían ese tiempo de espera, es decir, cómo utilizarían los datos que aparecen en la tabla para determinar el tiempo que deberá esperar el autobús.

>>> Manos a la obra

I. Observen la tabla anterior y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál fue el tiempo mínimo que esperó a que pasara un autobús?

____

b) ¿Y el tiempo máximo? _______________________________

c) De los 10 tiempos de espera que registró, ¿cuál fue el que más veces se repitió?

____

d) ¿Cuál es el tiempo promedio que tuvo que esperar a que pasara un autobús?

____

e) ¿Alguno de los 10 tiempos registrados por Jesús es igual al tiempo de espera promedio? _______________________________

>>> A lo que llegamos

El valor que más veces se repite en un conjunto de datos se llama moda. Es decir, es el que tiene mayor frecuencia absoluta.

Al promedio también se le llama media aritmética, y se obtiene sumando todos los valores y dividiendo la suma entre el número total de valores.

Por ejemplo, si los valores son 4, 4, 3, 7, 8 y 4, la media o promedio se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Media} = \frac{4 + 4 + 3 + 7 + 8 + 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

La moda es 4, porque es el valor con mayor frecuencia absoluta.

II. Consideren ahora los tiempos que tardaron en pasar los autobuses de una y otra línea para completar la siguiente tabla.

Línea A		Línea B	
Mínimo tiempo de espera		Mínimo tiempo de espera	
Máximo tiempo de espera		Máximo tiempo de espera	
Tiempo de espera más frecuente (moda)		Tiempo de espera más frecuente (moda)	
Tiempo de espera promedio (media)		Tiempo de espera promedio (media)	

Observen que los valores anotados en la tabla resumen la información sobre la situación que se está estudiando. Utilicen esta información para contestar las siguientes preguntas.

a) Considerando a los autobuses de la línea A, ¿cuál es la diferencia entre los tiempos máximo y mínimo de espera? ______

b) Considerando a los autobuses de la línea B, ¿cuál es la diferencia entre los tiempos máximo y mínimo de espera? ______

c) ¿Cuál es la línea que tiene el menor tiempo de espera promedio? ______

______

d) ¿Qué valor de la tabla puede considerarse como el más adecuado para representar el tiempo que tarda en pasar un autobús? ______

______

e) ¿En cuál de las dos líneas le conviene más viajar a Jesús? ______

Comparen sus respuestas y comenten cómo las encontraron.

>>> A lo que llegamos

La moda y la media son dos medidas que representan el comportamiento de un conjunto de datos. Estas medidas son más útiles cuando el conjunto de valores es muy grande.

>>> Lo que aprendimos

1. En otro horario, Pedro toma un autobús de las líneas A o B y sus tiempos de espera en minutos fueron los siguientes: 9, 4, 6, 5, 6, 15, 6, 6, 6, 6.

a) ¿Cuál es la moda de este conjunto de datos? ______

b) ¿Cuál es la media? ______

c) En esta situación, ¿cuál de las dos medidas, la moda o la media, es más adecuada considerar para representar el tiempo que tarda en pasar un autobús? ______

¿Por qué? ______

2. En la secuencia 14, **La TV: ¿Ventana al mundo o "caja idiota"?**, de su libro de *Español I, volumen II* realizaron una encuesta en la que una de las preguntas era: "¿Cuántas horas permanece encendido el televisor de tu casa durante el día?"

a) Utilicen esa información para calcular el tiempo promedio que permanece encendida la televisión en los hogares de todo tu grupo. ______

______

b) En esa misma encuesta se pregunta por el tipo de programas que ven. ¿Cuál es el tipo de programa que más ven en el grupo? ______________________

c) De acuerdo con los resultados de la encuesta, ¿cuántas personas lo ven? ______

____

¿QUÉ PREFIEREN COMER?

SESIÓN 2

>>> Para empezar

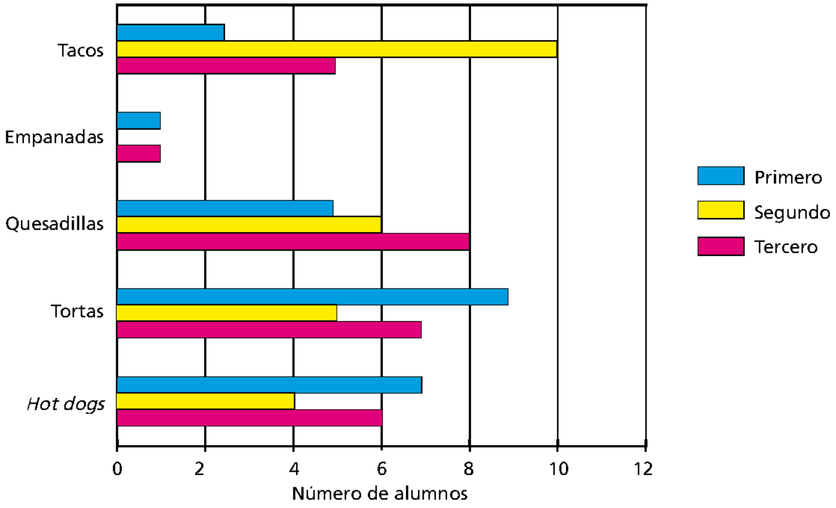
Diariamente, los medios de comunicación proporcionan información en la cual se utiliza el concepto de promedio. Por ejemplo, cuando analizan el comportamiento de: bolsa de valores, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos.

Sin embargo, existen situaciones en las que este dato no es el más representativo. Por ejemplo, en una empresa con 1 000 empleados, cada uno gana $ 5 000 y el dueño gana $10 000 000. Si se calcula el promedio del ingreso mensual, ¡resulta que es casi $15 000! Esto daría una idea completamente falsa de los ingresos mensuales que hay en esa empresa, ya que ninguno de los 1 000 empleados tiene un ingreso igual o parecido al promedio. Sería más representativo, en este caso, dejar al dueño fuera del grupo o utilizar otro valor representativo.

>>> Consideremos lo siguiente

En una telesecundaria se tomaron los datos que muestra la siguiente gráfica.

Tipo de comida que consumen alumnos de una telesecundaria por grado, en la cooperativa escolar



Con esta información, los responsables de la cooperativa pueden conocer cuántos kilos de tortillas y piezas de bolillo deben comprar al día.

En general, ¿qué tipos de alimentos consumen más los alumnos de esta telesecundaria?

____

Comparen y comenten sus respuestas.

>>> Manos a la obra

I. Contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos tipos de comida diferente hay? ____________

b) ¿Cuántos alumnos de primer grado consumen tacos? ____________

c) ¿Cuál alimento consumen más los alumnos de segundo grado? ____________

____

d) ¿Y los de tercero? ____________

e) ¿Cuántos alumnos de segundo grado consumen alimentos en la cooperativa?

____

f) ¿Y en tercero? ____________

g) ¿Cuántos alumnos en total consumen alimentos en la cooperativa? ____________

____

h) Considerando la cantidad de alumnos que consumen tortas, ¿cuántos bolillos se deben comprar al día? ____________

II. Completen la siguiente tabla con los datos que proporciona la gráfica de barras.

Tipo de comida	Consumo por grado			Total
	Primero	Segundo	Tercero	
 Tacos				
 Empanadas				
 Quesadillas				
 Tortas				
 *Hot dogs*				

a) ¿Qué tipo de comida piden más los alumnos de la telesecundaria? ____________

____

b) ¿Cuántas tortas en promedio se consumen por grado? ______________

c) ¿Cuántas quesadillas en promedio se consumen por grado? ______________

____

d) ¿Cuántas empanadas consumen los alumnos de segundo grado? ______________

____

e) ¿Cuántas empanadas en promedio se consumen por grado? ______________

>>> A lo que llegamos

Puede ocurrir que el valor que representa la media de un conjunto de datos no sea uno de los valores de ese conjunto.

Por otra parte, es muy común que el valor de la media de un conjunto de valores enteros sea un decimal.

Por ejemplo, en el caso del consumo de *hot dogs*, la media por grado es 5.6

III. En la misma telesecundaria se les preguntó a los 27 alumnos de primer grado la cantidad de dinero que gastaron en la cooperativa. La siguiente tabla muestra los resultados.

Cantidad de dinero que gastan en la cooperativa los alumnos de primer grado									
Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pesos $	10	10	100	10	10	5	0	0	100
Alumno	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Pesos $	0	0	10	0	15	12	100	5	10
Alumno	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Pesos $	15	0	0	5	100	10	10	2	15

a) ¿Cuál es la cantidad de dinero que con más frecuencia gastan los alumnos de primer grado? ______________

b) ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad máxima de dinero que gastan los alumnos y la cantidad mínima? ______________

c) En la siguiente tabla, ordena de mayor a menor la cantidad de dinero que gastan los alumnos de primer grado.

d) ¿Cuál es el dato que quedó al centro de la tabla? ______

e) Completen la siguiente tabla sobre lo que gastan los alumnos de primer grado.

Recuerden que:
La mediana corresponde al valor que se encuentra en el centro del conjunto de datos después de ordenarlos de menor a mayor.

Moda	
Media	
Mediana	

f) ¿Cuál es la medida que representa mejor la cantidad de dinero que gastan los alumnos de primero? ______

g) ¿Por qué lo consideran así? ______

>>> A lo que llegamos

La **media**, la **moda** y la **mediana** son medidas de tendencia central, de las cuales la más conocida es la media. Sin embargo, debe considerarse que los valores extremos la afectan muy fácilmente. Cuando en un conjunto de valores se da este caso, es conveniente considerar si la moda o la mediana son medidas que representan mejor a ese conjunto.

>>> Lo que aprendimos

1. Una competencia consta de tres etapas. Juan ha jugado dos de las tres etapas.

Resultados de Juan	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Puntos	62	53	

Para ganar la competencia, Juan debe tener un promedio de 60 puntos.

¿Cuántos puntos necesita ganar en la tercera etapa? ______

2. En una nueva competencia Juan tiene de promedio 30 puntos. En la primera etapa obtuvo 26 puntos, y en la última logró 20 puntos más que en la primera etapa.

a) ¿Cuántos puntos obtuvo en la segunda etapa? ______________________

b) Completen la siguiente tabla.

Resultados de Juan	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Puntos	26		
		Promedio	30

3. Ahora están jugando Juan y María. Ambos tienen el mismo promedio, pero en la primera y tercera etapa obtuvieron puntuaciones diferentes. ¿Cuáles fueron las puntuaciones de Juan? Completen la tabla.

Jugador	Primera etapa	Segunda etapa	Tercera etapa
Juan	26	50	
María		50	55

>>> Para saber más

Consulta en las Bibliotecas Escolares y de Aula:
Bosch, Carlos y Caludia Gómez. *Una ventana a la incertidumbre*. México: SEP/Santillana, Libros del Rincón, 2003.